เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555

<u>ตอนที่ 1</u> : ข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก

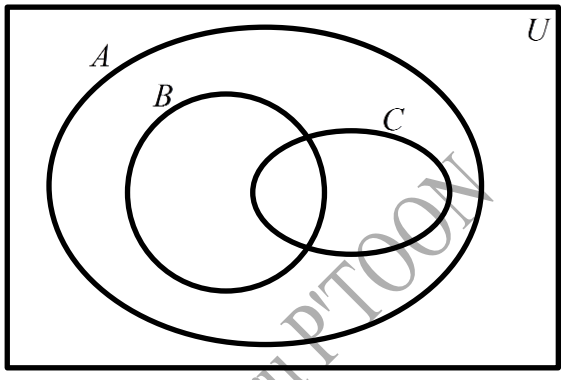
1. ตอบ 2

จาก $A \cap B = B$ แสดงว่า $B \subset A$

นอกจากนั้น $C \subset A$ และ $B \cap C \neq \phi$

ซึ่งสามารถวาดแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

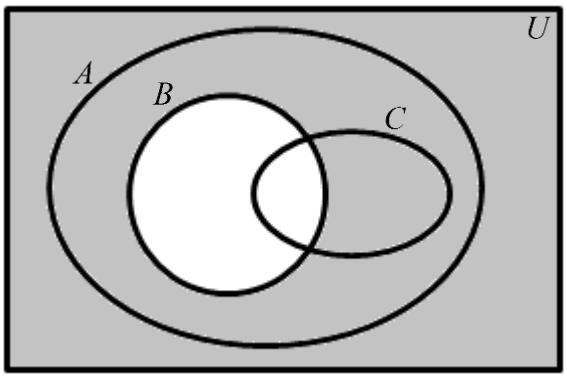
คร่าวๆได้ดังรูป



โจทย์กำหนดให้ $n(U) = 12$ และ $n(A' \cup B') = 10$

นั่นคือพื้นที่แรเงามีสมาชิก 10 จำนวน

จึงทำให้ได้ว่า $n(B) = 2$



โจทย์กำหนดให้ $n(A \cap B') = 4$ แสดงว่า $n(A - B) = 4$ ซึ่งเราสามารถสร้างเซต A, B, C, U

ได้โดยกำหนดให้ $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

และสมมติให้ $B = \{1,2\}$ และ $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ซึ่งจะสอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ทุกอย่าง

พิจารณาเซต C ซึ่ง $C \subset A$ และ $B \cap C \neq \phi$ ดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> : $B \cap C \neq \phi$

ซึ่งมีได้ 3 กรณีคือ $(1 \in A$ และ $2 \notin A)$ หรือ $(1 \notin A$ และ $2 \in A)$ หรือ $(1 \in A$ และ $2 \in A)$

ดังนั้น จากเงื่อนไข $B \cap C \neq \phi$ จะทำให้มีเซต C ได้ทั้งหมด 3 แบบ

<u>ขั้นที่ 2</u> : $C \subset A$ นั่นคือเซต C อาจจะมีสมาชิกอื่นๆจากเซต A ได้อีก ที่ไม่ใช่เลข 1 และ 2

ตัวเลข 3 มีโอกาสได้ 2 แบบคือ $3 \in C$ หรือ $3 \notin C$ ก็ได้

ตัวเลข 4 มีโอกาสได้ 2 แบบคือ $4 \in C$ หรือ $4 \notin C$ ก็ได้

ตัวเลข 5 มีโอกาสได้ 2 แบบคือ $5 \in C$ หรือ $5 \notin C$ ก็ได้

ตัวเลข 6 มีโอกาสได้ 2 แบบคือ $6 \in C$ หรือ $6 \notin C$ ก็ได้

แสดงว่าเซต C จะมีหรือไม่มีสมาชิกอื่นๆในเซต A ที่ไม่ใช่เลข 1 หรือ 2 ได้ทั้งหมด $2^4 = 16$ แบบ

<u>สรุป</u> : เราสามารถสร้างเซต C ได้ทั้งหมด $3 \times 16 = 48$ แบบ

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2

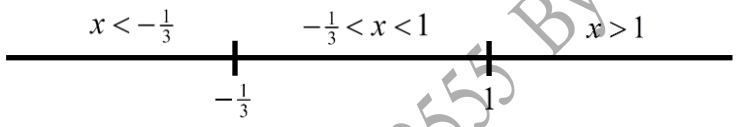
2. ตอบ 3

$$\begin{aligned}
[(p\wedge\sim q)\vee\sim p]\Rightarrow[(r\vee s)\wedge(r\vee\sim s)] &\equiv [(p\vee\sim p)\wedge(\sim q\vee\sim p)]\Rightarrow[r\vee(s\wedge\sim s)] \\
&\equiv [\mathbf{T}\wedge(\sim q\vee\sim p)]\Rightarrow[r\vee\mathbf{F}] \\
&\equiv (\sim p\vee\sim q)\Rightarrow r \\
&\equiv \sim(\sim p\vee\sim q)\vee r \\
&\equiv (p\wedge q)\vee r \equiv (p\vee r)\wedge(q\vee r)
\end{aligned}$$

3. ตอบ 1

จะเห็นได้ว่า $x=1$ ไม่เป็นคำตอบของอสมการ $3|x-1|-2x > 2|3x+1|$ แน่นอน

- เราจะแบ่งพิจารณาเซตคำตอบของอสมการ $3|x-1|-2x > 2|3x+1|$ เป็นกรณีๆ ตามค่าของ x ที่ทำให้ในค่าสัมบูรณ์เท่ากับ 0 นั่นคือข้อนี้เราจะนำค่า $x=1$ และ $x=-\dfrac{1}{3}$ มาแบ่งกรณีได้ 3 กรณี



<u>กรณีที่ 1</u> : $x<-\frac{1}{3}$

จะได้ว่า $|3x+1| = -(3x+1) = -3x-1$ และ $|x-1| = -(x-1) = -x+1$

จาก $3|x-1|-2x > 2|3x+1|$

จะได้ $3(-x+1)-2x > 2(-3x-1)$

$-3x+3-2x > -6x-2$

$x > -5$

และจากเงื่อนไข $x<-\frac{1}{3}$ จะได้ว่าจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

คือ $x=-1,-2,-3,-4$

<u>กรณีที่ 2</u> : $-\frac{1}{3}<x<1$

จะได้ว่า $|3x+1| = 3x+1$ และ $|x-1| = -(x-1) = -x+1$

จาก $3|x-1|-2x > 2|3x+1|$

จะได้ $3(-x+1)-2x > 2(3x+1)$

$-3x+3-2x > 6x+2$

$x < \frac{1}{11}$

และจากเงื่อนไข $-\frac{1}{3}<x<1$ จะได้ว่าจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับเงื่อนไขคือ $x=0$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... KRUPTOON

<u>กรณีที่ 3</u> : $x>1$

จะได้ว่า $|3x+1| = 3x+1$ และ $|x-1| = x-1$

จาก $3|x-1|-2x > 2|3x+1|$

จะได้ $3(x-1)-2x > 2(3x+1)$

$$3x-3-2x > 6x+2$$

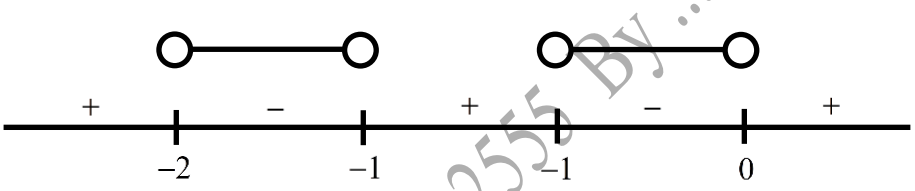
$$x < -1$$

ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข $x>1$ แสดงว่าเซตคำตอบของกรณีนี้คือ ϕ

<u>สรุป</u> : เซตคำตอบของอสมการ $3|x-1|-2x > 2|3x+1|$ ที่เป็นจำนวนเต็มคือ

$A=\{0,-1,-2,-3,-4\}$

- พิจารณาเซตคำตอบของอสมการ $x(x+2)(x+1)^2<0$



ดังนั้น $B=(-2,-1)\cup(-1,0)$

พิจารณาตัวเลือกทั้ง 4 ตัวเลือกดังนี้

Choice 1 : $A-B = \{0,-1,-2,-3,-4\}$ ซึ่งมีสมาชิก 5 ตัว ข้อนี้จึง**<u>ถูก</u>**

Choice 2 : $A\cup B = \{0,-1,-2,-3,-4\}\cup(-2,-1)\cup(-1,0)$

$= \{-3,-4\}\cup[-2,-1]\cup[-1,0]$

$= \{-3,-4\}\cup[-2,0] \neq A$ ข้อนี้จึงไม่ถูกต้อง

Choice 3 : $A\cap B = \{0,-1,-2,-3,-4\}\cap\big((-2,-1)\cup(-1,0)\big) = \phi$

ดังนั้น $A\cap B$ มีสมาชิก 0 ตัว ข้อนี้จึงไม่ถูกต้อง

Choice 4 : $A-B = \{0,-1,-2,-3,-4\}-\big((-2,-1)\cup(-1,0)\big) = A$

และ $B-A = \big((-2,-1)\cup(-1,0)\big)-\{0,-1,-2,-3,-4\} = B$

ดังนั้น $(A-B)\cup(B-A) = A\cup B = \{-3,-4\}\cup[-2,0] \neq A$ ข้อนี้จึงไม่ถูกต้อง

<u>หมายเหตุ</u> : ข้อนี้เซต A ยังไงก็ต้องแยกกรณีคิดนะครับ ไม่สามารถคิดวิธีอื่นได้แล้วจริงๆ

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

4. ตอบ 4

● พิจารณาข้อความ (ก)

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r ที่ว่า $|x|y+y-x-1 = 0$

$$(|x|+1)y = x+1$$

$$y = \frac{x+1}{|x|+1}$$

จะเห็นว่า $|x|+1 \neq 0$ เสมอ ดังนั้นโดเมนของความสัมพันธ์ r คือ $D_r = R$ ดังนั้นข้อ (ก) จึงผิด

● พิจารณาข้อความ (ข)

จาก $y = \frac{x+1}{|x|+1}$ ถ้าแทน $y=1$ จะได้ว่า $1 = \frac{x+1}{|x|+1}$

$$|x|+1 = x+1$$

$$|x| = x$$

ซึ่งสมการ $|x| = x$ มีค่า x ที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าวมากกว่า 1 ค่าแน่นอน

แสดงว่าความสัมพันธ์ r ไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จึงทำให้ความสัมพันธ์ r^{-1} **<u>ไม่เป็น</u>**ฟังก์ชัน ดังนั้นข้อ (ข) จึงผิด

<u>หมายเหตุ</u>

1. ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชัน $1-1$ ก็ต่อเมื่อเราแทนค่า y ใดๆก็ได้ 1 ค่า จะต้องได้ค่า x กลับมาเพียง 1 ค่าเท่านั้น
2. ความสัมพันธ์ r^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชัน $1-1$

5. ตอบ 2

ลองพิจารณาค่าของ A, B, C, D เมื่อเราแทนค่า $\theta = 30^\circ$

$$\therefore \quad A = (\sin\theta)^{\tan\theta} = (\sin 30^\circ)^{\tan 30^\circ} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$B = (\sin\theta)^{\cot\theta} = (\sin 30^\circ)^{\cot 30^\circ} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} = 2^{-\sqrt{3}}$$

และ $C = (\cot\theta)^{\sin\theta} = (\cot 30^\circ)^{\sin 30^\circ} = \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{3}}$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

เนื่องจาก $-\sqrt{3} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ดังนั้น $2^{-\sqrt{3}} < 2^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$ นั่นคือ $B < A$ ..... (1)

เพราะว่า $-\sqrt{3} < 0$ ดังนั้น $2^{-\sqrt{3}} < 2^0$ นั่นคือ $B < 1$ ..... (2)

และเนื่องจาก $\sqrt{3} > 1$ ดังนั้น $\sqrt{\sqrt{3}} > 1$ นั่นคือ $C > 1$ ..... (3)

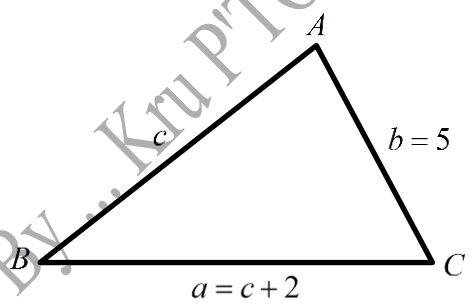
จาก (2) และ (3) เพียงพอที่จะสรุปว่า $B < C$ ..... (4)

และจาก (1) และ (4) เพียงพอที่จะตอบตัวเลือกที่ 2 ครับ

6. ตอบ 4

จากกฎของโคไซน์ที่ว่า $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

และโจทย์กำหนดให้ $C = 60^\circ$, $b = 5$ และ $a = c + 2$



จะได้ $c^2 = (c+2)^2 + 5^2 - 2(c+2)(5)\cos 60^\circ$

$= c^2 + 4c + 4 + 25 - 2(5c+10)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= c^2 + 4c + 29 - (5c+10) = c^2 - c + 19$

ดังนั้น $c = 19$ ซึ่งจะทำให้ $a = 21$ ทำให้สามเหลี่ยม ABC มีเส้นรอบรูปยาว $19 + 5 + 21 = 45$ หน่วย

7. ตอบ 1

วงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน X และแกนโทอยู่บนแกน Y จะมีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

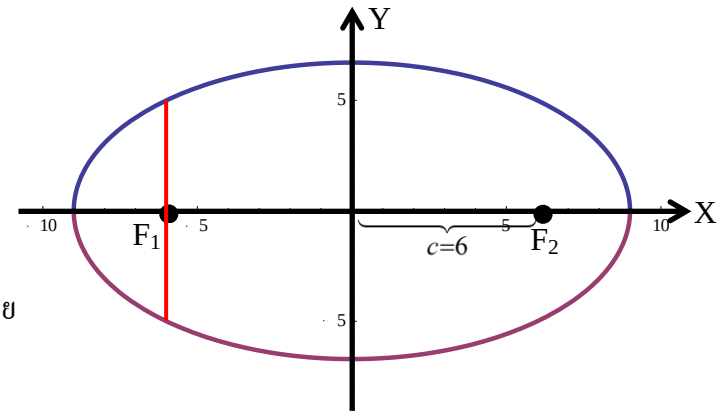
ระยะห่างระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองจุดของ

วงรีจะยาว $2c$ หน่วยเสมอ

นั่นคือ $2c = 12$ ดังนั้น $c = 6$

เนื่องจากความยาวของคอร์ดที่ผ่านจุดโฟกัส

และตั้งฉากกับแกนเอกของวงรียาว $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย



ดังนั้น $\frac{2b^2}{a} = 10$ นั่นคือ $b^2 = 5a$

จาก $a^2 = b^2 + c^2$ จะได้ว่า $a^2 = 5a + 36$ นั่นคือ $a^2 - 5a - 36 = 0$

ดังนั้น $(a-9)(a+4) = 0$ นั่นคือ $a = 9$ หรือ $a = -4$ แต่ $a > 0$ เสมอ ดังนั้น $a = 9$

จาก (1) จะได้ว่า $b^2 = 5a = 45$ ดังนั้นสมการของวงรีคือ $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$ หรือ $5x^2 + 9y^2 = 405$

** ข้อนี้ต้องรู้ว่าความยาวของคอร์ดที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนเอกของวงรีจะยาว $\frac{2b^2}{a}$ หน่วยเสมอ

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

8. ตอบ 3

จัดรูปสมการวงกลมใหม่ได้เป็น

$$(x^2-6x)+(y^2+4y) = -4$$

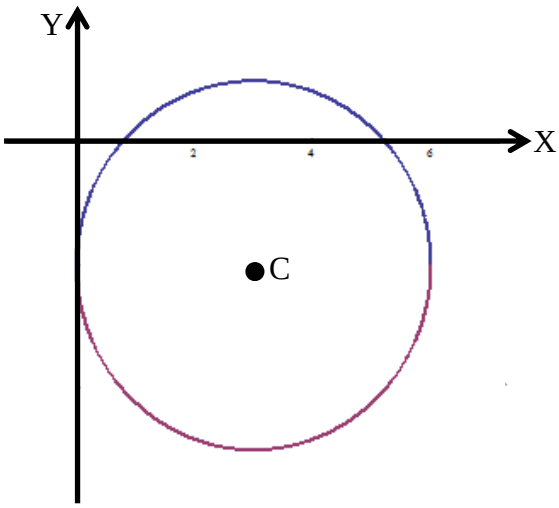
$$(x^2-6x+\mathbf{9})+(y^2+4y+\mathbf{4}) = -4+\mathbf{9}+\mathbf{4}$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2 = 9$$

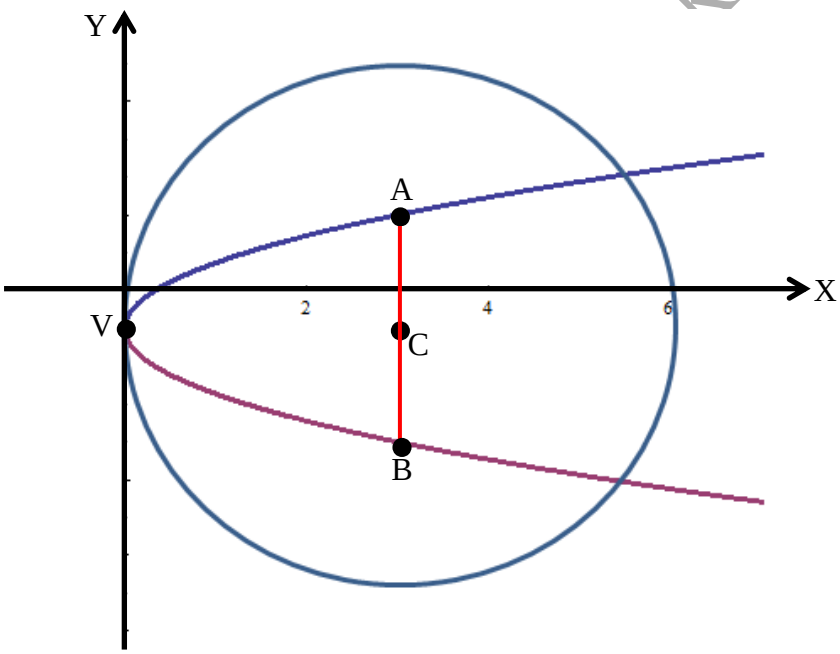
ซึ่งเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(3,-2)$

และมีรัศมียาว 3 หน่วย ดังรูป

จะได้ว่า วงกลมตัดแกน Y ที่จุด $(0,-2)$



ดังนั้นพาราโบลามีจุดโฟกัสอยู่ที่ $F(3,-2)$ และมีจุดยอดอยู่ที่ $V(0,-2)$ ซึ่งสามารถวาดกราฟได้ดังนี้



ดังนั้นระยะห่างระหว่างจุดยอดและจุดโฟกัสของพาราโบลานี้เท่ากับ 3 หน่วย

และจะได้ว่า $c=3$ เพราะว่า เป็นพาราโบลาที่ไปทางขวา

โจทย์กำหนดให้ A และ B เป็นจุดบนพาราโบลาซึ่งส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ผ่านจุดโฟกัส F และตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา แสดงว่า $\overline{AB}$ คือความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาซึ่งจะยาวเท่ากับ $|4c|$ หน่วยเสมอ

ดังนั้นความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาในข้อนี้ยาวเท่ากับ $\overline{AB} = |4c| = |4(3)| = 12$ หน่วย

ดังนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม VAB มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}\times$ ฐาน $\times$ สูง $= \frac{1}{2}\times 3\times 12 = 18$ ตารางหน่วย

9. ตอบ 2

เซตคำตอบของอสมการ $\left(\frac{3}{5}\right)^{(5x^2-23x+3)} > \left(\frac{5}{3}\right)^{(x+5)}$

เหมือนกับเซตคำตอบของอสมการ $\left(\frac{3}{5}\right)^{(5x^2-23x+3)} > \left(\frac{3}{5}\right)^{-(x+5)}$

เพราะว่า $\frac{3}{5}<1$ ดังนั้น $5x^2-23x+3 < -(x+5)$

$$5x^2-23x+3 < -x-5$$

$$5x^2-22x+8 < 0$$

$$(5x-2)(x-4) < 0$$

ดังนั้น $A=(\frac{2}{5},4)$

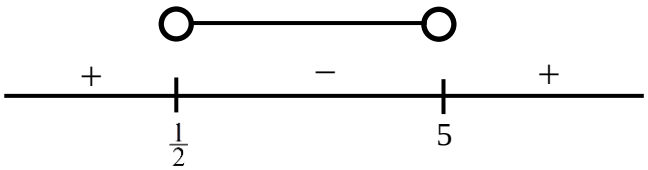
พิจารณา Choice 1 : $(5x-1)(x-3)<0$

นั่นคือ $\{x\in R \mid (5x-1)(x-3)<0\} = (\frac{1}{5},3)$ ซึ่ง $A\not\subset(\frac{1}{5},3)$ ข้อนี้จึงผิด

พิจารณา Choice 2 : $(4x-1)(x-4)<0$

นั่นคือ $\{x\in R \mid (4x-1)(x-4)<0\} = (\frac{1}{4},4)$ ซึ่ง $A\subset(\frac{1}{4},4)$ ข้อนี้จึง**ถูก**

พิจารณา Choice 3 : $(2x-1)(x-5)<0$

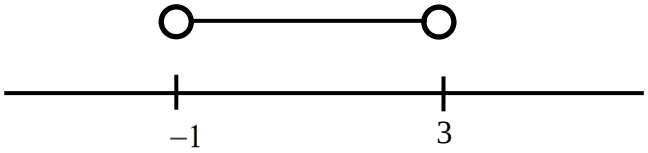


นั่นคือ $\{x\in R \mid (2x-1)(x-5)<0\} = (\frac{1}{2},5)$ ซึ่ง $A\not\subset(\frac{1}{2},5)$ ข้อนี้จึงผิด

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

พิจารณา Choice 4 : $|x-1|<2$

นั่นคือ $-2 < x-1 < 2$ หรือ $-1 < x < 3$



นั่นคือ $\{x \in R \mid |x-1|<2\} = (-1,3)$ ซึ่ง $A \not\subset (-1,3)$ ข้อนี้จึงผิด

10. ตอบ 1

● พิจารณาข้อ (ก)

จาก $b^2 = ac$ จะได้ว่า $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$

ดังนั้น $(\log_a x)(\log_b x - \log_c x) = \dfrac{\log x}{\log a}\left(\dfrac{\log x}{\log b} - \dfrac{\log x}{\log c}\right) = \dfrac{\log x}{\log a}\left(\dfrac{\log c \log x - \log b \log x}{\log b \log c}\right)$

$$= \frac{\log x}{\log a}\left(\frac{\log x(\log c - \log b)}{\log b \log c}\right) = \frac{\log x}{\log a}\left(\frac{\log x \log\left(\frac{c}{b}\right)}{\log b \log c}\right)$$

$$= \frac{\log x}{\log c}\left(\frac{\log x \log\left(\frac{b}{a}\right)}{\log a \log b}\right) = \frac{\log x}{\log c}\left(\frac{\log x(\log b - \log a)}{\log a \log b}\right)$$

$$= \frac{\log x}{\log c}\left(\frac{\log x}{\log a} - \frac{\log x}{\log b}\right)$$

$$= (\log_c x)(\log_a x - \log_b x)$$ ดังนั้น ข้อ (ก) ถูก

● พิจารณาข้อ (ข)

จาก $a^2 + b^2 = c^2$ จะได้ว่า $a^2 = c^2 - b^2$

ดังนั้น $\log_{(c+b)} a + \log_{(c-b)} a = \dfrac{\log a}{\log(c+b)} + \dfrac{\log a}{\log(c-b)} = \log a\left(\dfrac{1}{\log(c+b)} + \dfrac{1}{\log(c-b)}\right)$

$$= \log a\left(\frac{\log(c-b) + \log(c+b)}{\log(c+b)\log(c-b)}\right)$$

$$= \log a\left(\frac{\log(c^2 - b^2)}{\log(c+b)\log(c-b)}\right) = \log a\left(\frac{\log a^2}{\log(c+b)\log(c-b)}\right)$$

$$= \frac{2\log a \log a}{\log(c+b)\log(c-b)} = 2\left(\frac{\log a}{\log(c+b)}\frac{\log a}{\log(c-b)}\right)$$

$$= 2\left(\log_{(c+b)} a\right)\left(\log_{(c-b)} a\right)$$ ดังนั้น ข้อ (ข) ถูก

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

11. ตอบ 3

- พิจารณาเซต A

จาก $\log(\sqrt{x+1}+5) = \log x$ จะได้ว่า $\sqrt{x+1}+5 = x$

$$\sqrt{x+1} = x-5$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง ; $x+1 = x^2-10x+25$

$$x^2-11x+24 = 0$$

$$(x-3)(x-8) = 0 \quad \text{นั่นคือ } x=3 \text{ หรือ } x=8$$

ถ้า $x=3$ จากโจทย์จะได้ว่า $\log(\sqrt{3+1}+5) = \log 3$

$\log 7 = \log 3$ ซึ่งจะทำให้สมการ**<u>ไม่เป็นจริง</u>**

ถ้า $x=8$ จากโจทย์จะได้ว่า $\log(\sqrt{8+1}+5) = \log 8$

$\log 8 = \log 8$ ซึ่งจะทำให้สมการ**<u>เป็นจริง</u>**

ดังนั้น $A=\{8\}$

- พิจารณาเซต B

จาก $\log_2(3x)+\log_4(9x)+\log_8(27x) = 3+2\log_{64}(x)$

จะได้ $\log_2(3x)+\log_{2^2}(9x)+\log_{2^3}(27x) = 3\log_2 2+2\log_{2^6}(x)$

$$\log_2(3x)+\frac{1}{2}\log_2(9x)+\frac{1}{3}\log_2(27x) = \log_2 2^3+\frac{2}{6}\log_2(x)$$

$$\log_2(3x)+\log_2(9x)^{\frac{1}{2}}+\log_2(27x)^{\frac{1}{3}} = \log_2 8+\frac{1}{3}\log_2(x)$$

$$\log_2(3x)+\log_2(3x^{\frac{1}{2}})+\log_2(3x^{\frac{1}{3}}) = \log_2 8+\log_2 x^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_2(3x\cdot 3x^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^{\frac{1}{3}}) = \log_2(8x^{\frac{1}{3}})$$

นั่นคือ $27x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} = 8x^{\frac{1}{3}}$

แต่เนื่องจาก $x\neq 0$ จึงหาร $x^{\frac{1}{3}}$ ตลอด ; $x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

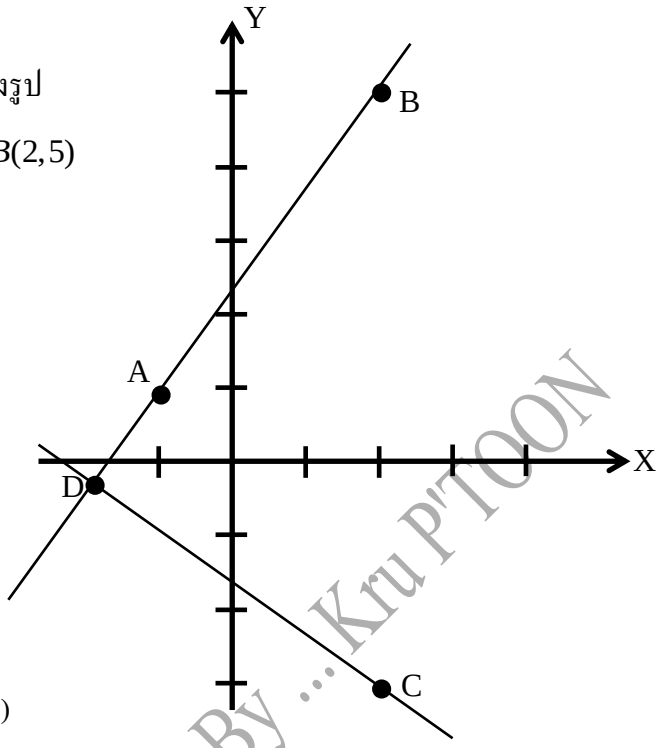
ยกกำลัง $\frac{2}{3}$ ทั้ง 2 ข้าง ; $x = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

ดังนั้น $B=\left\{\frac{4}{9}\right\}$

ซึ่งทำให้ $A\cup B=\left\{8,\frac{4}{9}\right\}$ ดังนั้นผลคูณของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A\cup B$ จึงเท่ากับ $\frac{32}{9}$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

12. ตอบ 3



เราลองวาดรูปสามเหลี่ยม ABC คร่าวๆได้ดังรูป

จะได้ว่าเส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด $A(-1,1)$, $B(2,5)$

มีความชัน $= \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-1}{2-(-1)} = \dfrac{4}{3}$

★ สรุป : เส้นตรง L มีความชัน $m = \dfrac{4}{3}$

และผ่านจุด $B(2,5)$

จากสูตรการหาสมการเส้นตรง

$y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - 5 = \dfrac{4}{3}(x-2)$

นั่นคือ $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{7}{3}$ ..... (1)

เนื่องจากส่วนของเส้นตรง $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง L ดังนั้น $m_{\overline{CD}} = -\dfrac{3}{4}$

★ สรุป : ส่วนของเส้นตรง $\overline{CD}$ มีความชัน $m_{\overline{CD}} = -\dfrac{3}{4}$ และผ่านจุด $C(2,-3)$

จากสูตรการหาสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - (-3) = -\dfrac{3}{4}(x-2)$ นั่นคือ $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2}$ ..... (2)

ดังนั้นเราสามารถหาจุด D (จุดตัดของเส้นตรง L และส่วนของเส้นตรง $\overline{CD}$) ได้จาก

การแก้สมการที่ (1) และ (2) นั่นคือ $\dfrac{4}{3}x + \dfrac{7}{3} = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2}$

คูณด้วย 12 : $16x + 28 = -9x - 18$

$25x = -46$ นั่นคือ $x = -\dfrac{46}{25}$

จาก (2) จะได้ว่า $y = -\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{46}{25}\right) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{69}{50} - \dfrac{75}{50} = -\dfrac{3}{25}$ $\therefore$ พิกัดจุด D คือ $D(-\dfrac{46}{25}, -\dfrac{3}{25})$

ทำให้เวกเตอร์ $\overrightarrow{AD} = D - A = (-\dfrac{46}{25}, -\dfrac{3}{25}) - (-1,1) = (-\dfrac{21}{25}, -\dfrac{28}{25}) = -\dfrac{7}{25}(3\bar{i} + 4\bar{j})$

<u>หมายเหตุ</u> :

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,5) - (-1,1) = (3,4)$ และเวกเตอร์ $\overrightarrow{AD}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานและมี

ทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$ ดังนั้น $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} = k(3,4) = k(3\bar{i} + 4\bar{j})$ โดยที่ $k < 0$

ถ้าเรารู้เพียงเท่านี้ เราก็จะตอบได้แล้วว่าเวกเตอร์ $\overrightarrow{AD}$ ต้องตอบตัวเลือกที่ 3 เท่านั้น

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ...Kru P'TOON

13. ตอบ 1

เพราะว่า $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+xy & x-x \\ y-y & xy+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+xy & 0 \\ 0 & 1+xy \end{bmatrix}$

และโจทย์กำหนดให้ $A^2 = I$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1+xy & 0 \\ 0 & 1+xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ นั่นคือ $xy = 0$ ..... (1)

จาก $AB = 2C$ จะได้ว่า $\det(AB) = \det(2C)$

$$\det(A)\det(B) = 2^2\det(C)$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{bmatrix}\det(B) = 4\det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(-1-xy)\det(B) = 4(-1)$$

เพราะว่า $xy = 0$; $(-1)\det(B) = 4(-1)$ นั่นคือ $\det(B) = 4$

ดังนั้น $\det(B^{-1}) = \dfrac{1}{\det(B)} = \dfrac{1}{4} = 0.25$

14. ตอบ 3

- พิจารณาข้อ (ก)

ถ้าให้ $\bar{u} = \bar{i}$ และ $\bar{v} = -\bar{i}$ จะได้ว่า $|\bar{u}| = 1$ และ $|\bar{v}| = 1$ ซึ่ง $|\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 = 0$ ..... (1)

เนื่องจาก $\bar{u} - \bar{v} = \bar{i} - (-\bar{i}) = 2\bar{i}$ ดังนั้น $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = 2^2 = 4$ ..... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $|\bar{u} - \bar{v}|^2 < |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2$ เป็นเท็จ ดังนั้น ข้อ (ก) ไม่ถูกต้อง

- พิจารณาข้อ (ข)

จากสูตร $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

แต่เนื่องจาก $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ทำให้ $\theta = 90^\circ$ ซึ่ง $\cos\theta = 0$

ดังนั้น $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$ ดังนั้น ข้อ (ข) ถูกต้อง

<u>หมายเหตุ 1</u>

สำหรับข้อความ (ก) ไม่จำเป็นต้องยกตัวอย่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เหมือนเฉลยข้างต้นก็ได้

แต่ถ้าเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ คู่ใดๆโดยที่ $|\bar{u}|^2 < |\bar{v}|^2$ ข้อความดังกล่าวก็จะเป็นเท็จทันที

เพราะว่าถ้า $|\bar{u}|^2 < |\bar{v}|^2$ จะทำให้ $|\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 < 0$ แต่ $|\bar{u} - \bar{v}|^2 \geq 0$ เสมออยู่แล้ว

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

<u>หมายเหตุ 2</u>

ถ้าเราลองวาดรูปเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ให้ตั้งฉากกันตามโจทย์

เราจะได้ว่าด้านตรงข้ามมุมฉากคือความยาวของเวกเตอร์

$\bar{u}-\bar{v}$ ซึ่งจากทฤษฎีของพีธากอรัส เราจะได้ว่า

$\left|\bar{u}-\bar{v}\right|^2 = \left|\bar{u}\right|^2+\left|\bar{v}\right|^2$ ทำให้ข้อ (ข) ถูกต้อง

15. ตอบ 1

- พิจารณาข้อความ (ก)

** ต้องรู้ว่าผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ มีสูตรว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$ เมื่อ $|r|<1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{(a+b)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(a+b)^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{(a+b)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a+b}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{(a+b)}\right)^n$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)+\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\ldots\right]}_{\text{อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ } r=\frac{a}{a+b}} + \underbrace{\left[\left(\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{a+b}\right)^3+\ldots\right]}_{\text{อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ } r=\frac{b}{a+b}}$$

$$= \left[\frac{\frac{a}{a+b}}{1-\frac{a}{a+b}}\right]+\left[\frac{\frac{b}{a+b}}{1-\frac{b}{a+b}}\right] = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a+b}} + \frac{\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}}$$

$$= \frac{a}{b}+\frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$$

ดังนั้น ข้อ (ก) ถูกต้อง

- พิจารณาข้อความ (ข)

จากสูตร $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$ จะได้ว่า $S_m = \frac{m}{2}\left[2a_1+(m-1)d\right]$

จาก

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m} = \frac{n^2}{m^2}$$

$$\frac{\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]}{\frac{m}{2}\left[2a_1+(m-1)d\right]} = \frac{n^2}{m^2}$$

$$\frac{2a_1+(n-1)d}{2a_1+(m-1)d} = \frac{n}{m}$$

$$2a_1m+(n-1)md = 2a_1n+(m-1)nd$$

$$2a_1m+nmd-md = 2a_1n+mnd-nd$$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... KruP'TOON

$$2a_1m - md = 2a_1n - nd$$

$$2a_1(m-n) - (m-n)d = 0$$

$$(m-n)(2a_1 - d) = 0$$

โจทย์กำหนดให้ $m \neq n$ ดังนั้นจะได้ว่า $2a_1 - d = 0$ นั่นคือ $d = 2a_1$

ดังนั้น $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{a_1+(m-1)d}{a_1+(n-1)d} = \dfrac{a_1+(m-1)(2a_1)}{a_1+(n-1)(2a_1)} = \dfrac{1+(m-1)(2)}{1+(n-1)(2)}$ (หาร a_1 ทุกพจน์)

$= \dfrac{1+2m-2}{1+2n-2} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$ ดังนั้น ข้อ (ข) ถูกต้อง

16. ตอบ 2

จาก $f''(x) = 2x+1$ จะได้ว่า $f'(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x+1)\,dx = x^2 + x + c$

จาก $f'(2) = 2$ จะได้ว่า $f'(2) = 2^2 + 2 + c$

$2 = 6 + c$ นั่นคือ $c = -4$

ดังนั้น $f'(x) = x^2 + x - 4$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(1,3)$ มีค่าเท่ากับ $f'(1) = 1^2 + 1 - 4 = -2$

ดังนั้นความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(1,3)$ มีค่าเท่ากับ $\dfrac{1}{2}$

จากสูตรการหาสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - 3 = \dfrac{1}{2}(x-1)$ นั่นคือ $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$

17. ตอบ 4

จาก $f(x) = \dfrac{ax+1}{x^2+1}$ จะได้ว่า $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(ax+1) - (ax+1)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{(x^2+1)(a) - (ax+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

ดังนั้น $g(x) = (x^2+1)f'(x) = (x^2+1)\left(\dfrac{(x^2+1)(a) - (ax+1)(2x)}{(x^2+1)^2}\right) = \dfrac{a(x^2+1) - 2x(ax+1)}{x^2+1}$

จาก $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ g(x) & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$ และ h ต่อเนื่องที่ $x = 2$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} g(x)$$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{ax+1}{x^2+1} = \lim_{x\to 2^-}\frac{a(x^2+1)-2x(ax+1)}{x^2+1}$$

$$\frac{2a+1}{5} = \frac{5a-4(2a+1)}{5}$$

$$2a+1 = -3a-4 \quad \text{นั่นคือ} \quad a=-1$$

ดังนั้น $f(x) = \dfrac{-x+1}{x^2+1}$ และ $g(x) = \dfrac{-(x^2+1)-2x(-x+1)}{x^2+1}$

นั่นคือ $2h(-2)-h(2) = 2g(-2)-f(2) = 2\left(\dfrac{-\left((-2)^2+1\right)-2(-2)\left(-(-2)+1\right)}{(-2)^2+1}\right)-\left(\dfrac{-2+1}{2^2+1}\right)$

$$= 2\left(\frac{-5-2(-2)(3)}{5}\right)-\left(\frac{-1}{5}\right) = 2\left(\frac{7}{5}\right)+\frac{1}{5} = 3$$

18. ตอบ 2

จาก $h(x)=x^2+4$ จะได้ว่า $h'(x)=2x$ ..... (1)

จาก $g(x)=h\left(f(x)-1\right)$

ถ้าเราหาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างจะได้ $g'(x) = h'\left(f(x)-1\right)\cdot\left(f'(x)\right)$

แทนค่า $x=1$; $g'(1) = h'\left(f(1)-1\right)\cdot\left(f'(1)\right)$

แทนค่า $f'(1)=g'(1)=1$; $1 = h'\left(f(1)-1\right)(1)$

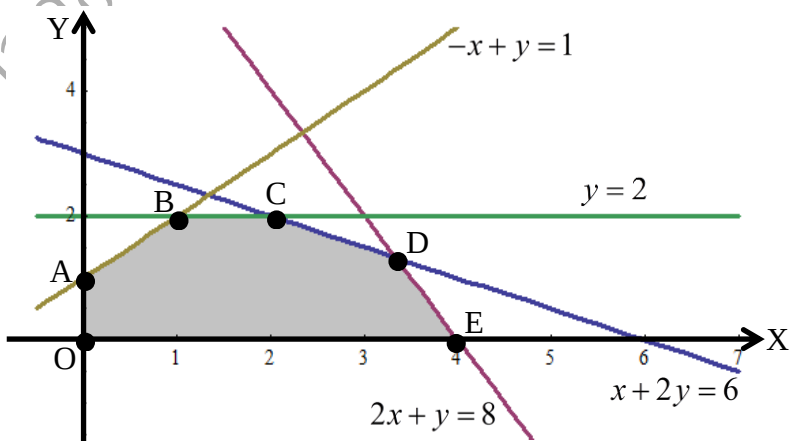
$$h'\left(f(1)-1\right) = 1$$

จาก (1) จะได้ว่า $2\left(f(1)-1\right) = 1$

นั่นคือ $f(1)-1 = \dfrac{1}{2}$ ดังนั้น $f(1)=1.5$

19. ตอบ 3

ก่อนอื่นเลยเราต้องวาดอาณาบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการจุดประสงค์ก่อน ดังรูป



จากรูป จะได้ว่า จุด A คือ $(0,1)$ (เพราะเป็นจุดตัดแกน Y ของเส้นตรง $-x+y\le 1$)

และจะได้ว่าจุด E คือจุด $(4,0)$ (เพราะเป็นจุดตัดแกน X ของเส้นตรง $2x+y\le 8$)

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

- หาพิกัดของจุด B และ C โดยการแทน $y=2$ ลงในสมการ $-x+y=1, x+2y=6$ จะได้ว่า $x=1$ และ $x=2$ ตามลำดับ ดังนั้นพิกัดของจุด B คือ $(1,2)$ และพิกัดของจุด C คือ $(2,2)$
- หาพิกัดของจุด D

$x+2y=6$ ..... (1)

$2x+y=8$ ..... (2)

$2 \times (1)$; $2x+4y=12$ ..... (3)

$(3)-(2)$; $3y=4$ นั่นคือ $y=\frac{4}{3}$ และจาก (1) จะได้ว่า $x+2\left(\frac{4}{3}\right)=6$

นั่นคือ $x=\frac{10}{3}$ ดังนั้นพิกัดของจุด D คือ $(\frac{10}{3},\frac{4}{3})$

แทนจุดทั้งหมดลงในสมการจุดประสงค์ $P=3x+2y$ จะได้ดังตาราง

	$(0,0)$	$(0,1)$	$(4,0)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(\frac{10}{3},\frac{4}{3})$
$P=3x+2y$	0	2	12	7	10	$\frac{38}{3}$

ดังนั้นค่ามากที่สุดของ $P=3x+2y$ เท่ากับ $\frac{38}{3}$

20. ตอบ 2

- พิจารณาข้อมูลก่อนรวมคะแนนของสายชลและนางสาวฟ้า

จากค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 25 คะแนน จะได้ว่า $25 = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{30} x_i = 750$ ..... (1)

จากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 5 คะแนน จะได้ว่า $5 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{30} x_i^2}{30}-(25)^2}$

ดังนั้น $25 = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i^2}{30}-625$ นั่นคือ $\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 30(650) = 19500$ ..... (2)

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

- พิจารณาข้อมูลเมื่อรวมคะแนนของสายชลและนางสาวฟ้าเข้าไปด้วย

จาก (1) จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{32} x_{\text{New}} = 750+20+30 = 800$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลใหม่ มีค่าเท่ากับ $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{32} x_{\text{New}}}{32} = \dfrac{800}{32} = 25$

จาก (2) จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{32} x_{\text{New}}^2 = 19500+20^2+30^2 = 20800$

ดังนั้นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดใหม่มีค่าเท่ากับ

$$\text{SD}_{\text{New}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{32} x_{\text{New}}^2}{32} - (25)^2} = \sqrt{\frac{20800}{32} - (625)} = \sqrt{650-625} = \sqrt{25} = 5$$

21. ตอบ 4

เหตุการณ์ที่เราสนใจคือ $\{a,b,c\} \subset A$ โดยที่ $a<b<c$ และเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต เราจึงแยกคิดเป็นกรณีตามค่าของผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตได้ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> : ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 1

จะได้ว่า มีสับเซตที่ $\{a,b,c\}$ ที่โจทย์ต้องการทั้งหมด 5 สับเซตคือ

$\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{4,5,6\}, \{5,6,7\}$

<u>กรณีที่ 2</u> : ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 2

จะได้ว่า มีสับเซตที่ $\{a,b,c\}$ ที่โจทย์ต้องการทั้งหมด 3 สับเซตคือ

$\{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \{3,5,7\}$

<u>กรณีที่ 3</u> : ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตเท่ากับ 3

จะได้ว่า มีสับเซตที่ $\{a,b,c\}$ ที่โจทย์ต้องการทั้งหมด 1 สับเซตคือ $\{1,4,7\}$

สรุป : เหตุการณ์ที่เราสนใจมีทั้งหมด $n(E)=5+3+1=9$ วิธี

เหตุการณ์ทั้งหมดคือ สับเซต $\{a,b,c\}$ ทั้งหมดซึ่ง $\{a,b,c\} \subset \{1,2,3,4,5,6,7\}$

ซึ่งมีทั้งหมด $n(S) = \binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!4!} = 35$ วิธี

ดังนั้น ความน่าจะเป็นมีค่าเท่ากับ $\dfrac{9}{35}$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

22. ตอบ 1

จากตารางที่โจทย์กำหนดให้ เราสามารถเขียนตารางใหม่ ให้ข้อมูลอยู่ในรูปของอันตรภาคชั้น พร้อมทั้งหาความถี่และจุดกึ่งกลางของแต่ละอันตรภาคชั้นได้ดังตารางด้านขวามือ

อายุ (ปี)	จำนวน (คน)	จุดกึ่งกลางชั้น
21 - 25	9	23
26 - 30	8	28
31 - 35	7	33
36 - 40	13	38
41 - 45	6	43
46 - 50	7	48

จากสูตร $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} f_i x_i}{N}$ เมื่อ x_i แทนจุดกึ่งกลางชั้นของแต่ละอันตรภาคชั้น

$$\bar{x} = \frac{9(23)+8(28)+7(33)+13(38)+6(43)+7(48)}{50} = \frac{1750}{50} = 35$$

23. ตอบ 4

- พิจารณาข้อความ (ก)

ถ้าเราต้องการพิจารณาว่าความสามารถของนักเรียนกลุ่มใดมีความแตกต่างมากกว่ากัน

ให้เราพิจารณาค่าของ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ซึ่งหาค่าได้จาก $\text{SD} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - (\bar{x})^2}$

☯ พิจารณานักเรียนกลุ่มที่ 1

จะได้ว่า $\bar{x} = \dfrac{7+6+5+8+3+6+9+7+6+10}{10} = \dfrac{67}{10} = 6.7$

และ $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 7^2+6^2+5^2+8^2+3^2+6^2+9^2+7^2+6^2+10^2 = 485$

ดังนั้น $\text{SD}_1 = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\dfrac{485}{10} - (6.7)^2} = \sqrt{48.5 - 44.89} = \sqrt{3.61}$

☯ พิจารณานักเรียนกลุ่มที่ 2

จะได้ว่า $\bar{x} = \dfrac{6+9+15+12+1+8+7+7+5+6}{10} = \dfrac{76}{10} = 7.6$

และ $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 6^2+9^2+15^2+12^2+1^2+8^2+7^2+7^2+5^2+6^2 = 710$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ...Kru P'TOON

ดังนั้น $SD_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{710}{10} - (7.6)^2} = \sqrt{71 - 57.76} = \sqrt{13.24}$

เนื่องจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของนักเรียนกลุ่มที่ 1 มีค่าน้อยกว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของนักเรียนกลุ่มที่ 2 แสดงว่า ความสามารถของนักเรียนกลุ่มที่ 1 มีความแตกต่างกัน**<u>น้อยกว่า</u>**นักเรียนกลุ่มที่ 2

ข้อ (ก) จึงผิด

- พิจารณาข้อความ (ข)

เนื่องจากเราจะต้องหาค่าที่เกี่ยวข้องกับควอร์ไทล์ ดังนั้นเราจะต้องเรียงข้อมูลของนักเรียนในแต่ละกลุ่มจากน้อยไปหามากก่อน ดังนี้

กลุ่มที่ 1 3 , 5 , 6 , 6 , 6 , 7 , 7 , 8 , 9 , 10

กลุ่มที่ 2 1 , 5 , 6 , 6 , 7 , 7 , 8 , 9 , 12 , 15

☯ พิจารณาค่าควอร์ไทล์ที่ 1 และควอร์ไทล์ที่ 3 ของนักเรียนกลุ่มที่ 1

- ตำแหน่งควอร์ไทล์ที่ 1 เท่ากับ $\frac{1(N+1)}{4} = \frac{11}{4} = 2.75$

ดังนั้น Q_1 = ข้อมูลตำแหน่งที่ 2 + 0.75(ข้อมูลตำแหน่งที่ 3 − ข้อมูลตำแหน่งที่ 2)

$Q_1 = 5 + 0.75(6-5) = 5.75$

- ตำแหน่งควอร์ไทล์ที่ 3 เท่ากับ $\frac{3(N+1)}{4} = \frac{33}{4} = 8.25$

ดังนั้น Q_3 = ข้อมูลตำแหน่งที่ 8 + 0.25(ข้อมูลตำแหน่งที่ 9 − ข้อมูลตำแหน่งที่ 8)

$Q_3 = 8 + 0.25(9-8) = 8.25$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{8.25 - 5.75}{8.25 + 5.75} = \frac{2.5}{14} = \frac{5}{28}$

☯ พิจารณาค่าควอร์ไทล์ที่ 1 และควอร์ไทล์ที่ 3 ของนักเรียนกลุ่มที่ 2

- ตำแหน่งควอร์ไทล์ที่ 1 เท่ากับ $\frac{1(N+1)}{4} = \frac{11}{4} = 2.75$

ดังนั้น Q_1 = ข้อมูลตำแหน่งที่ 2 + 0.75(ข้อมูลตำแหน่งที่ 3 − ข้อมูลตำแหน่งที่ 2)

$Q_1 = 5 + 0.75(6-5) = 5.75$

- ตำแหน่งควอร์ไทล์ที่ 3 เท่ากับ $\frac{3(N+1)}{4} = \frac{33}{4} = 8.25$

ดังนั้น Q_3 = ข้อมูลตำแหน่งที่ 8 + 0.25(ข้อมูลตำแหน่งที่ 9 − ข้อมูลตำแหน่งที่ 8)

$Q_3 = 9 + 0.25(12-9) = 9.75$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \dfrac{9.75 - 5.75}{9.75 + 5.75} = \dfrac{4}{15.5} = \dfrac{8}{31}$

ข้อ (ข) จึงผิด

<u>หมายเหตุ</u>

1. สำหรับข้อความ (ข) เราหาค่าของสัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 ก็เพียงพอที่จะตอบแล้วว่า ข้อความ (ข) นั้นผิด
2. ในกรณีที่ตำแหน่งของข้อมูลของควอร์ไทล์ / เดไซล์ หรือ เปอร์เซ็นไทล์ ไม่ลงตัว โดยที่ตำแหน่งของข้อมูลอยู่ระหว่างข้อมูลตัวที่ k กับข้อมูลตัวที่ $k+1$ เราจะสามารถหาค่าของควอร์ไทล์ / เดไซล์ หรือ เปอร์เซ็นไทล์ ได้จาก $x_k + (\text{ทศนิยมของตำแหน่ง})(x_{k+1} - x_k)$ เช่นตำแหน่งของเปอร์เซ็นไทล์คือตำแหน่งที่ 5.28 เราก็จะได้ว่า ค่าของเปอร์เซ็นไทล์ หาค่าได้จาก $x_5 + 0.28(x_6 - x_5)$ เป็นต้น

24. ตอบ 2

จากนิยาม $a \star b = a^b$ เราสามารถพิจารณาแต่ละตัวเลือกได้ดังนี้

<u>ตัวเลือกที่ 1</u> : $a \star (b \star c) = a \star (b^c) = a^{(b^c)}$ และ $(a \star c) \star b = (a^c) \star b = (a^c)^b = a^{bc}$

แต่ $a^{(b^c)} = a^{bc}$ นั้นไม่ได้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริงบวก a, b, c

ดังนั้น $a \star (b \star c) = (a \star c) \star b$ จึงไม่จริง ข้อ 1. จึงไม่ถูกต้อง

<u>ตัวเลือกที่ 2</u> : $(a \star b) \star c = (a^b) \star c = (a^b)^c = a^{bc}$ และ $a \star (bc) = a^{bc}$

ซึ่ง $a^{bc} = a^{bc}$ นั้น เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริงบวก a, b, c

ดังนั้น $(a \star b) \star c = a \star (bc)$ จึงเป็นจริง ข้อ 2. จึง**<u>ถูกต้อง</u>**

<u>ตัวเลือกที่ 3</u> : $a \star (b \star c) = a \star (b^c) = a^{(b^c)}$ และ $(a \star b) \star c = (a^b) \star c = (a^b)^c = a^{bc}$

แต่ $a^{(b^c)} = a^{bc}$ นั้นไม่ได้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริงบวก a, b, c

ดังนั้น $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ จึงไม่จริง ข้อ 3. จึงไม่ถูกต้อง

<u>ตัวเลือกที่ 4</u> : $(a + b) \star c = (a + b)^c$ และ $(a \star c) + (b \star c) = a^c + b^c$

แต่ $(a + b)^c = a^c + b^c$ นั้นไม่ได้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริงบวก a, b, c

ดังนั้น $(a + b) \star c = (a \star c) + (b \star c)$ จึงไม่จริง ข้อ 4. จึงไม่ถูกต้อง

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... KruPTOON

25. ตอบ 4

- พิจารณาค่า a

$$a = \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{4}+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3} \approx 3.732$$

- พิจารณาค่า b

จาก $b=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}$ ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้างจะได้ $b^2 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}} = 2b$

แต่เนื่องจาก $b \neq 0$ แน่นอน จึงหารด้วย b ทั้งสองข้าง ทำให้ได้ว่า $b=2$

- พิจารณาค่า c

$$c = \sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 1.414+1.732 = 3.146$$

ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า $b<c<a$ จึงทำให้ได้ว่า $\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$ นั่นเอง

<u>TRICK !!!!</u>

ถ้า $a=x+y$ และ $b=xy$ แล้ว $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{(x+y)\pm 2\sqrt{xy}} = \left|\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right|$ เสมอนะครับ

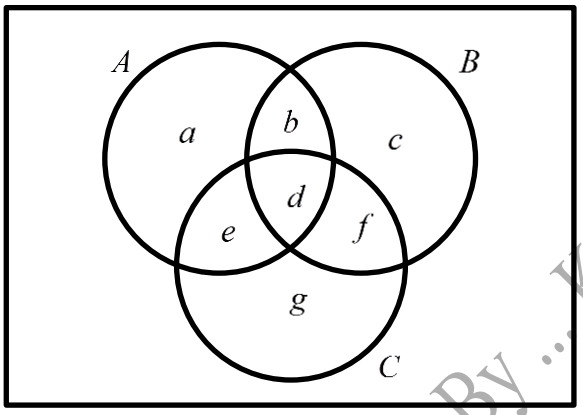
เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

<u>ตอนที่ 2</u> : ข้อสอบแบบเติมคำ

26. ตอบ 25

กำหนดให้

A แทนเซตของคนอ่านนวนิยาย , B แทนเซตของคนอ่านหนังสือพิมพ์ และ C แทนเซตของคนอ่านนิตยสาร และกำหนดสมาชิกในแต่ละช่องตามแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ดังรูป



โจทย์กำหนดให้ มี 75 คน ชอบอ่านนวนิยาย นั่นคือ $n(A)=75$

ดังนั้น $a+b+d+e = 75$ ..... (1)

โจทย์กำหนดให้ มี 70 คน ชอบอ่านหนังสือพิมพ์ นั่นคือ $n(B)=70$

ดังนั้น $b+c+d+f = 70$ ..... (2)

โจทย์กำหนดให้ มี 80 คน ชอบอ่านนิตยสาร นั่นคือ $n(C)=80$

ดังนั้น $d+e+f+g = 80$ ..... (3)

$(1)+(2)+(3)$; $a+2b+c+3d+2e+2f+g = 225$ ..... (4)

โจทย์กำหนดให้ $n(A\cup B\cup C)=100$

ดังนั้น $a+b+c+d+e+f+g = 100$ ..... (5)

$2\times(2)$; $2a+2b+2c+2d+2e+2f+2g = 200$ ..... (6)

$(4)-(6)$; $-a-c+d-g = 25$ นั่นคือ $d = 25+a+c+g$

แต่เนื่องจาก $a\geq 0, c\geq 0, g\geq 0$ ดังนั้น $d\geq 25$

นั่นคือ จะมีสมาชิกอย่างน้อย 25 คนที่ชอบอ่านทั้งสามรายการ

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

27. ตอบ 6

จาก ax^5+bx+4 หารด้วย $(x-1)^2$ ลงตัว เราจะสมมติให้ $Q(x)$ แทนผลลัพธ์ของการหารดังกล่าว

ดังนั้น $ax^5+bx+4 = (x-1)^2Q(x)$ ..... (1)

แทน $x=1$ ใน (1) ; $a+b+4 = (0)^2Q(1)$

$a+b = -4$ ..... (2)

diff สมการ (1) ; $5ax^4+b = (x-1)^2Q'(x)+Q(x)\big(2(x-1)\big)$ ..... (3)

แทน $x=1$ ใน (3) ; $5a+b = 0$ ..... (4)

$(4)-(2)$ จะได้ว่า $4a=4$ นั่นคือ $a=1$

จาก (4) เมื่อแทนค่า $a=1$ จะได้ว่า $5+b = 0$ นั่นคือ $b=-5$

ดังนั้น $a-b = 1-(-5) = 6$

28. ตอบ 6

สูตรที่จำเป็นต้องรู้สำหรับข้อนี้คือ

1. ถ้า $A+B=90^\circ$ จะได้ว่า $\sin A=\cos B$
2. $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$
3. $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

$$
\begin{aligned}
2\sin^2 60^\circ\left(\tan 5^\circ+\tan 85^\circ\right)-12\sin 70^\circ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}+\frac{\sin 85^\circ}{\cos 85^\circ}\right)-12\sin 70^\circ \\
&= 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\sin 5^\circ\cos 85^\circ+\sin 85^\circ\cos 5^\circ}{\cos 5^\circ\cos 85^\circ}\right)-12\sin 70^\circ \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{\sin(5^\circ+85^\circ)}{\cos 5^\circ\sin 5^\circ}\right)-12\sin 70^\circ \\
&= \frac{3\sin 90^\circ}{2\sin 5^\circ\cos 5^\circ}-12\sin 70^\circ = \frac{3}{\sin 10^\circ}-12\sin 70^\circ \\
&= \frac{3-12\sin 70^\circ\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{3-6(2\sin 70^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ} \\
&= \frac{3-6\big(\cos(70^\circ-10^\circ)-\cos(70^\circ+10^\circ)\big)}{\sin 10^\circ} \\
&= \frac{3-6\left(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ\right)}{\sin 10^\circ} = \frac{3-6\cos 60^\circ+6\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} \\
&= \frac{3-6\left(\frac{1}{2}\right)+6\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{6\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 6
\end{aligned}
$$

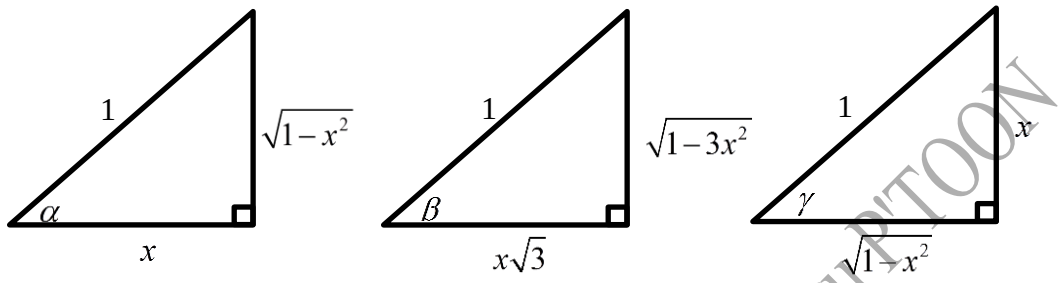
เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

29. ตอบ 1

- พิจารณาเซต A

กำหนดให้ $\alpha = \arccos x$, $\beta = \arccos(x\sqrt{3})$, $\gamma = \arccos(\sqrt{1-x^2})$

ดังนั้น $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = x\sqrt{3}$ และ $\cos\gamma = \sqrt{1-x^2}$ ซึ่งวาดสามเหลี่ยมได้ดังนี้



จากสมการ $\arccos x = \arccos(x\sqrt{3}) + \arccos(\sqrt{1-x^2})$ ..... (1)

จะกลายเป็น $\alpha = \beta + \gamma$

Take cos ทั้งสองข้าง ; $\cos\alpha = \cos(\beta+\gamma)$

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$$

$$x = x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-3x^2}$$

$$x = x(\sqrt{3-3x^2} - \sqrt{1-3x^2})$$

นั่นคือ $x(\sqrt{3-3x^2} - \sqrt{1-3x^2} - 1) = 0$ ..... (2)

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $\sqrt{3-3x^2} - \sqrt{1-3x^2} - 1 = 0$

☯ พิจารณาสมการ $\sqrt{3-3x^2} - \sqrt{1-3x^2} - 1 = 0$

เพราะว่า $\sqrt{3-3x^2} = \sqrt{1-3x^2} + 1$

ยกกำลังสอง ; $3-3x^2 = 1-3x^2 + 2\sqrt{1-3x^2} + 1$

$$1 = 2\sqrt{1-3x^2}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{1-3x^2}$$

ยกกำลังสอง ; $\frac{1}{4} = 1-3x^2$

$$3x^2 = \frac{3}{4}$$

นั่นคือ $x^2 = \frac{1}{4}$ ดังนั้น $x = \frac{1}{2}$ หรือ $x = -\frac{1}{2}$

<u>สรุป</u> : คำตอบของสมการ (2) คือ $x = 0$ หรือ $x = \frac{1}{2}$ หรือ $x = -\frac{1}{2}$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... KruP'TOON

แต่สิ่งที่เราห้ามพลาดโดยเด็ดขาด (แต่ทุกคนชอบลืมกัน) คือ ต้องตรวจคำตอบลงในสมการ (1) ด้วย

- ตรวจคำตอบค่า $x=0$ จากสมการ (1)

  จะได้ว่า $\arccos 0 = \arccos 0 + \arccos 1$ นั่นคือ $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}+0$ ซึ่งจริง

  $\therefore\ x=0$ ใช้ได้

- ตรวจคำตอบค่า $x=\frac{1}{2}$ จากสมการ (1)

  จะได้ว่า $\arccos\frac{1}{2} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ นั่นคือ $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$ ซึ่งจริง

  $\therefore\ x=\frac{1}{2}$ ใช้ได้

- ตรวจคำตอบค่า $x=-\frac{1}{2}$ จากสมการ (1)

  จะได้ว่า $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

  นั่นคือ $\pi-\frac{\pi}{3} = \left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}$ ซึ่งไม่จริง $\therefore\ x=-\frac{1}{2}$ ใช้ไม่ได้

ดังนั้น $A=\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$

☒ วิธีที่เราจะหาเซต $A-B$ ได้ง่ายที่สุดคือ แทนสมาชิกในเซต A ลงไปในสมการ

$$\arccos x = \arcsin x + \arcsin(1-x) \qquad \text{..... (3)}$$

ถ้าแทนค่า $x\in A$ แล้วสอดคล้องกับสมการ (2) แสดงว่า $x\in B$ ด้วย นั่นคือ $x\notin A-B$

แต่ถ้าแทนค่า $x\in A$ แล้ว<u>**ไม่**</u>สอดคล้องกับสมการ (2) แสดงว่า $x\notin B$ นั่นคือ $x\in A-B$

- พิจารณาว่า $x=0$ อยู่ในเซต B หรือไม่

  แทน $x=0$ ลงในสมการ (3) จะได้ว่า $\arccos 0 = \arcsin 0+\arcsin 1$

  นั่นคือ $\frac{\pi}{2} = 0+\frac{\pi}{2}$ ซึ่งจริง ดังนั้น $0\in B$ หรือแปลว่า $0\notin A-B$ นั่นเอง

- พิจารณาว่า $x=\frac{1}{2}$ อยู่ในเซต B หรือไม่

  แทน $x=\frac{1}{2}$ ลงในสมการ (3) จะได้ว่า $\arccos\frac{1}{2} = \arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2}$

  นั่นคือ $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$ ซึ่งจริง ดังนั้น $\frac{1}{2}\in B$ หรือแปลว่า $\frac{1}{2}\notin A-B$ นั่นเอง

<u>**สรุป**</u> : $A-B=\phi$ จึงทำให้จำนวนสมาชิกของ $P(A-B)$ เท่ากับ $2^{n(A-B)} = 2^0 = 1$ ตัว

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

<u>หมายเหตุ</u>

วิธีแก้สมการ $\arccos x = \arcsin x + \arcsin(1-x)$ ตรงๆทำดังนี้

จาก $\arccos x = \arcsin x + \arcsin(1-x)$

บวก $\arcsin x$ ทั้งสองข้าง ; $\arcsin x + \arccos x = 2\arcsin x + \arcsin(1-x)$

เพราะว่า $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} = 2\arcsin x + \arcsin(1-x)$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x) = 2\arcsin x$$

Take cos ทั้งสองข้าง ; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x)\right) = \cos\left(2\arcsin x\right)$

$$\sin\left(\arcsin(1-x)\right) = 1 - 2\sin^2\left(\arcsin x\right)$$

$$1 - x = 1 - 2x^2$$

$$2x^2 - x = 0$$

$$x(2x-1) = 0$$

$\therefore$ $x = 0$ หรือ $x = \frac{1}{2}$ ซึ่งเมื่อตรวจคำตอบแล้ว (จากหน้าที่แล้วไง ^^) พบว่าใช้ได้ทั้งคู่

ดังนั้น $B = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$ นั่นเอง

30. ตอบ 48

จาก $A^3 = 2I$ จะได้ว่า $\det\left(A^3\right) = \det\left(2I\right)$

$$\det\left(A\right)^3 = 2^3 \det\left(I\right)$$

$$\left(\det A\right)^3 = 8(1) = 8$$

ดังนั้น $\det A = 2$

ดังนั้น $\det\begin{bmatrix} -3g & -3h & -3i \\ -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \end{bmatrix} = (-3)(-1)(2)\det\begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ (ดึงตัวเลขแต่ละแถวออกได้)

$= \mathbf{(6)}(-1)\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}$ (สลับแถว 2 แถว ต้องคูณ -1)

$= \mathbf{(-6)}(-1)\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ (สลับแถว 2 แถว ต้องคูณ -1)

$= (6)\det A = (6)(2) = 12$

เฉลยข้อสอบ PAT1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

จาก $\det(C^{-1}) = 4$ จะได้ว่า $(\det C)^{-1} = 4$ นั่นคือ $\det C = \frac{1}{4}$

จาก $B^tC = \begin{bmatrix} -3g & -3h & -3i \\ -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det(B^tC) = \det\begin{bmatrix} -3g & -3h & -3i \\ -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \end{bmatrix}$

$$\det(B^t)\det C = 12$$

$$(\det B)\left(\frac{1}{4}\right) = 12 \quad \text{นั่นคือ} \quad \det B = 48$$

31. ตอบ 135

เพราะว่ากราฟของ $y = f(x)$ ตัดกับกราฟ $y = 3x+2$ ที่ $x = -1, 0, 1, 2$

ดังนั้น $f(-1) = 3(-1)+2 = -1$, $f(0) = 3(0)+2 = 2$

$f(1) = 3(1)+2 = 5$, $f(2) = 3(2)+2 = 8$

โจทย์กำหนดให้ $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

จาก $f(0) = 2$; $f(0) = \boxed{e = 2}$

จาก $f(-1) = -1$; $f(-1) = (-1)^5 + a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + d(-1) + 2 = -1$

$a - b + c - d = -2$ ..... (1)

จาก $f(1) = 5$; $f(1) = (1)^5 + a(1)^4 + b(1)^3 + c(1)^2 + d(1) + 2 = 5$

$a + b + c + d = 2$ ..... (2)

(1) + (2) ; $2a + 2c = 0$ นั่นคือ $a + c = 0$ หรือ $c = -a$ ..... (3)

(2) − (1) ; $2b + 2d = 4$ นั่นคือ $b + d = 2$ หรือ $d = 2 - b$ ..... (4)

จาก $f(2) = 8$; $f(2) = (2)^5 + a(2)^4 + b(2)^3 + c(2)^2 + d(2) + e = 8$

จาก (3) และ (4) ; $32 + 16a + 8b + 4(-a) + 2(2-b) + 2 = 8$

$$12a + 6b = -30$$

$2a + b = -5$ ..... (5)

$\therefore$ $f(3) - f(-2)$

$= \left((3)^5 + a(3)^4 + b(3)^3 + c(3)^2 + d(3) + e\right) - \left((-2)^5 + a(-2)^4 + b(-2)^3 + c(-2)^2 + d(-2) + e\right)$

$= \left((243) - (-32)\right) + (81a - 16a) + \left(27b - (-8b)\right) + (9c - 4c) + \left(3d - (-2d)\right)$

$= 275 + 65a + 35b + 5c + 5d = 275 + 65a + 35b + 5(-a) + 5(2-b)$

$= 275 + 60a + 35b + 10 - 5b = 285 + 60a + 30b$

$= 285 + 30(2a+b) = 285 + 30(-5) = 285 - 150 = 135$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

<u>หมายเหตุ</u>

อีกวิธีทำหนึ่งก็คือ กำหนดให้ $f(x)=(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)(x-k)+(3x+2)$; k เป็นค่าคงที่

(เราต้องบวก $3x+2$ ต่อด้านหลัง เพราะกราฟของ $y=f(x)$ ตัดกับกราฟของ $y=3x+2$)

จาก $f(x)$ ที่เรากำหนดให้แบบนี้ ทำให้ข้อมูล $f(-1)=-1$, $f(0)=2$, $f(1)=5$, $f(2)=8$

ก็ยังคงเป็นจริงอยู่

ดังนั้น $f(3)-f(-2) = \left(24(3-k)+11\right)-\left(24(-2-k)-4\right) = \left(83-24k\right)-\left(-52-24k\right)$

$= 135$

32. ตอบ 5

จาก $|z_1+z_2| = 3$ จะได้ $|z_1+z_2|^2 = 9$

$|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 = 9$ ..... (1)

จาก $|z_1-z_2| = 1$ จะได้ $|z_1-z_2|^2 = 1$

$|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2 = 1$ ..... (2)

(1) + (2) ; $2|z_1|^2+2|z_2|^2 = 10$ นั่นคือ $|z_1|^2+|z_2|^2 = 5$

33. ตอบ 10

สมมติให้ $z=a+bi$ จะได้ว่า $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ นั่นคือ $|z|^2 = a^2+b^2$

จาก $2|z|-3z = 9i-2$

จะได้ว่า $2\sqrt{a^2+b^2}-3(a+bi) = -2+9i$

$\left(2\sqrt{a^2+b^2}-3a\right)+(-3b)i = -2+9i$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า $-3b=9$ นั่นคือ $b=-3$

ทำนองเดียวกัน $2\sqrt{a^2+b^2}-3a = -2$

$2\sqrt{a^2+9} = 3a-2$ ..... (1)

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง ; $4(a^2+9) = (3a-2)^2$

$4a^2+36 = 9a^2-12a+4$

$5a^2-12a-32 = 0$

$(5a+8)(a-4) = 0$ นั่นคือ $a=-\frac{8}{5}$ หรือ $a=4$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

- ถ้า $a=-\frac{8}{5}$

จากสมการ (1) จะได้ว่า $2\sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2+9} > 0$ แต่ $3\left(-\frac{8}{5}\right)-2 < 0$

ดังนั้นค่า $a=-\frac{8}{5}$ ทำให้สมการ (1) ไม่จริง

นั่นคือ $a=4$ เท่านั้นและทำให้ $z=-4-3i$

ดังนั้น $w = \frac{(1+i)z}{2+i} = \frac{(1+i)(-4-3i)}{2+i}$

ซึ่ง $|w|^2 = \left|\frac{(1+i)(-4-3i)}{2+i}\right|^2 = \frac{|1+i|^2|-4-3i|^2}{|2+i|^2} = \frac{(2)(25)}{5} = 10$

34. ตอบ 166.25

กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $a_n = a_1 r^{n-1}$

จากผลบวกของสองพจน์แรกเท่ากับ 20 จะได้ $a_1+a_2 = 20$ ..... (1)

$a_1+a_1 r = 20$

$a_1(1+r) = 20$ ..... (2)

จากผลบวกของสี่พจน์แรกเท่ากับ 65 จะได้ $a_1+a_2+a_3+a_4 = 65$ ..... (3)

(3) − (1) ; $a_3+a_4 = 45$

$a_1 r^2+a_1 r^3 = 45$

$a_1 r^2(1+r) = 45$ ..... (4)

(4) ÷ (2) ; $r^2 = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$

แต่เนื่องจากโจทย์บอกว่าอัตราส่วนร่วมเป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $r=\frac{3}{2}$

จาก (2) ; $a_1\left(1+\frac{3}{2}\right) = 20$ นั่นคือ $a_1 = 20\times\frac{2}{5} = 8$

จากสูตรผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตที่ว่า $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

ดังนั้นผลบวกของหกพจน์แรกเท่ากับ

$$S_6 = \frac{8\left(\left(\frac{3}{2}\right)^6-1\right)}{\frac{3}{2}-1} = \frac{8\left(\frac{3^6}{2^6}-1\right)}{\frac{1}{2}} = 16\left(\frac{729}{64}-1\right) = \frac{729}{4}-16 = 182.25-16 = 166.25$$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By Kru P'TOON

35. ตอบ 1

เนื่องจาก $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(2n^2+2n+1)}{\left(n(n+1)\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{\left(n(n+1)\right)^2}} = \sqrt{\frac{\left(n(n+1)+1\right)^2}{\left(n(n+1)\right)^2}}$$

$$= \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}$$

$$= 1+\frac{1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ดังนั้น $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

$$= \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= (1+1+1+\ldots+1)+\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right] = n+1-\frac{1}{n+1}$$

ทำให้ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}\right) = 1$$

36. ตอบ 25

จาก $t_n = 2^n$ จะได้ว่า $a_n = 5^{t_n}+5^{-t_n} = 5^{2^n}+5^{-2^n}$ สำหรับ $n = 1,2,3,\ldots$

ดังนั้น $a_{n+1} = 5^{2^{n+1}}+5^{-2^{n+1}}$

และ $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n = (5^{2^1}+5^{-2^1})(5^{2^2}+5^{-2^2})(5^{2^3}+5^{-2^3})\ldots(5^{2^n}+5^{-2^n})$

$$= \frac{\mathbf{(5^{2^1}-5^{-2^1})}(5^{2^1}+5^{-2^1})(5^{2^2}+5^{-2^2})(5^{2^3}+5^{-2^3})\ldots(5^{2^n}+5^{-2^n})}{\mathbf{5^{2^1}-5^{-2^1}}}$$

$$= \frac{(5^{2^2}-5^{-2^2})(5^{2^2}+5^{-2^2})(5^{2^3}+5^{-2^3})\ldots(5^{2^n}+5^{-2^n})}{5^{2^1}-5^{-2^1}}$$

$$= \frac{(5^{2^3}-5^{-2^3})(5^{2^3}+5^{-2^3})\ldots(5^{2^n}+5^{-2^n})}{5^2-5^{-2}}$$

$$= \frac{(5^{2^4}-5^{-2^4})\ldots(5^{2^n}+5^{-2^n})}{25-0.25}$$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

ทำด้วยกระบวนการเดียวกันไปเรื่อยๆจะได้ว่า $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \dfrac{5^{2^{n+1}} - 5^{-2^{n+1}}}{24.96}$

ทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{2^{n+1}} + 5^{-2^{n+1}}}{\dfrac{5^{2^{n+1}} - 5^{-2^{n+1}}}{24.96}} = \lim\limits_{n\to\infty} (24.96)\left(\dfrac{5^{2^{n+1}} + 5^{-2^{n+1}}}{5^{2^{n+1}} - 5^{-2^{n+1}}}\right)$

คูณด้วย $5^{-2^{n+1}}$ ตลอด ; $= \lim\limits_{n\to\infty} (24.96)\left(\dfrac{1 + 5^{-2^{n+1}} \cdot 5^{-2^{n+1}}}{1 - 5^{-2^{n+1}} \cdot 5^{-2^{n+1}}}\right)$

$= (24.96) \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1 + 5^{-2^{n+2}}}{1 - 5^{-2^{n+2}}}\right) = (24.96)(1) = 24.96$

<u>หมายเหตุ</u> $\lim\limits_{n\to\infty} 5^{-2^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5^{2^{n+2}}} = 0$ นะครับ

37. ตอบ 990

จาก $f(x) = 2x + 3$ และ $(g \circ f)(x) = 8x^3 + 44x^2 + 80x + 48$

จะได้ว่า $g(f(x)) = 8x^3 + 44x^2 + 80x + 48$

$g(2x+3) = 8x^3 + 44x^2 + 80x + 48$ ..... (1)

สมมติให้ $2x + 3 = k$ ดังนั้น $x = \dfrac{k-3}{2}$

จาก (1) จะได้ว่า $g(k) = 8\left(\dfrac{k-3}{2}\right)^3 + 44\left(\dfrac{k-3}{2}\right)^2 + 80\left(\dfrac{k-3}{2}\right) + 48$

$= (k-3)^3 + 11(k-3)^2 + 40(k-3) + 48$

$= (k^3 - 9k^2 + 27k - 27) + (11k^2 - 66k + 99) + (40k - 120) + 48$

$= k^3 + 2k^2 + k$

ดังนั้น $g(x) = x^3 + 2x^2 + x$

ทำให้ $f(g(x)) = f(x^3 + 2x^2 + x) = 2(x^3 + 2x^2 + x) + 3 = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$

ดังนั้น $\int_0^6 f(g(x))\,dx = \int_0^6 (2x^3 + 4x^2 + 2x + 3)\,dx = \left.\dfrac{x^4}{2} + \dfrac{4x^3}{3} + x^2 + 3x\right|_0^6$

$= \dfrac{(6)^4}{2} + \dfrac{4(6)^3}{3} + (6)^2 + 3(6) = \dfrac{1296}{2} + \dfrac{864}{3} + 36 + 18 = 990$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

38. ตอบ 763

จาก $(f\circ g)(x)+2(f\circ g)(1-x) = 6x^2-10x+17$ ..... (1)

และ $2(f\circ g)(x)+(f\circ g)(1-x) = 6x^2-2x+13$ ..... (2)

$2\times(2)$; $4(f\circ g)(x)+2(f\circ g)(1-x) = 12x^2-4x+26$ ..... (3)

$(3)-(1)$; $3(f\circ g)(x) = 6x^2+6x+9$

$(f\circ g)(x) = 2x^2+2x+3$

จาก $g(x)=x^2+x+3$ จะได้ว่า $f(g(x)) = 2x^2+2x+3$

$f(x^2+x+3) = 2(x^2+x+3)-3$

ถ้าเราให้ $x^2+x+3=A$ จะได้ว่า $f(A) = 2A-3$

ดังนั้น $f(x)=2x-3$ ทำให้ $f(383) = 2(383)-3 = 763$

39. ตอบ 4

จาก $f(x)=x^3+ax+b$ จะได้ว่า $f'(x)=3x^2+a$ ..... (1)

$\therefore$ ความชันของเส้นสัมผัส L_1 = ความชันของเส้นโค้งที่ตำแหน่ง $x=a$

$= f'(a) = 3a^2+a$

$\therefore$ ความชันของเส้นสัมผัส L_2 = ความชันของเส้นโค้งที่ตำแหน่ง $x=b$

$= f'(b) = 3b^2+a$

เพราะว่า L_1 ขนานกับ L_2 ดังนั้น

ความชันของเส้นสัมผัส L_1 = ความชันของเส้นสัมผัส L_2

$3a^2+a = 3b^2+a$

$a^2 = b^2$ ..... (2)

จาก $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{9h}{f(1+h)-f(1)} = 1$ จะได้ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(1+h)-f(1)} = \dfrac{1}{9}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 9$

$f'(1) = 9$

จากสมการ (1) จะได้ว่า $f'(1) = 3(1)^2+a = 9$ นั่นคือ $a=6$

จากสมการ (2) จะได้ว่า $b^2=36$

แต่โจทย์บอกว่า a และ b เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน แสดงว่า $b=-6$ ดังนั้น $f(x)=x^3+6x-6$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

ทำให้ได้ว่า $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x^3+6x-6)\,dx = \left.\frac{x^4}{4}+3x^2-6x\right|_0^2$

$$= \frac{2^4}{4}+3(2)^2-6(2) = 4+12-12 = 4$$

40. ตอบ 3

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cot^3 x-1)\operatorname{cosec}^2 x}{1+\cos 2x-2\sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cot x-1)(\cot^2 x+\cot x+1)\operatorname{cosec}^2 x}{1+(2\cos^2 x-1)-2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x)(\cot x-1)(\cot^2 x+\cot x+1)\operatorname{cosec}^2 x}{(\sin x)(2\cos^2 x-2\sin^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)(\cot^2 x+\cot x+1)\operatorname{cosec}^2 x}{(2\sin x)(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cot^2 x+\cot x+1)\operatorname{cosec}^2 x}{(2\sin x)(\cos x+\sin x)} = \frac{(1+1+1)(2)}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 3$$

41. ตอบ 22

เราสามารถสร้างพหุนาม $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ โดยที่ $a,b,c,d\in\{0,1,2,\ldots\}$

และสอดคล้องกับเงื่อนไข $2a+b+c+d=4$ ได้ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> : $a=2$ จะได้ว่า $b+c+d=0$ นั่นคือ $(a,b,c,d)=(2,0,0,0)$

สรุปกรณีที่ 1 : มีพหุนามที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าวทั้งหมด 1 พหุนาม

<u>กรณีที่ 2</u> : $a=1$ จะได้ว่า $b+c+d=2$

<u>กรณีที่ 2.1</u> : $b=2$ จะได้ว่า $c+d=0$ นั่นคือ $(a,b,c,d)=(1,2,0,0)$

<u>กรณีที่ 2.2</u> : $b=1$ จะได้ว่า $c+d=1$

นั่นคือ $(a,b,c,d)=(1,1,1,0)$ หรือ $(1,1,0,1)$

<u>กรณีที่ 2.3</u> : $b=0$ จะได้ว่า $c+d=2$

นั่นคือ $(a,b,c,d)=(1,0,2,0)$ หรือ $(1,0,1,1)$ หรือ $(1,0,0,2)$

สรุปกรณีที่ 2 : มีพหุนามที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าวทั้งหมด 6 พหุนาม

<u>กรณีที่ 3</u> : $a=0$ จะได้ว่า $b+c+d=4$

<u>กรณีที่ 3.1</u> : $b=4$ จะได้ว่า $c=d=0$ เท่านั้น นั่นคือ $(a,b,c,d)=(0,4,0,0)$

<u>กรณีที่ 3.2</u> : $b=3$ จะได้ว่า $c+d=1$

นั่นคือ $(a,b,c,d)=(0,3,1,0)$ หรือ $(0,3,0,1)$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

<u>กรณีที่ 3.3</u> : $b=2$ จะได้ว่า $c+d=2$

นั่นคือ $(a,b,c,d)=(0,2,2,0)$ หรือ $(0,2,1,1)$ หรือ $(0,2,0,2)$

<u>กรณีที่ 3.4</u> : $b=1$ จะได้ว่า $c+d=3$

นั่นคือ $(a,b,c,d)=(0,1,3,0)$ หรือ $(0,1,1,2)$ หรือ $(0,1,2,1)$ หรือ $(0,1,0,3)$

<u>กรณีที่ 3.5</u> : $b=0$ จะได้ว่า $c+d=4$

นั่นคือ $(a,b,c,d)=(0,0,4,0)$ หรือ $(0,0,3,1)$ หรือ $(0,0,2,2)$

หรือ $(0,0,1,3)$ หรือ $(0,0,0,4)$

สรุปกรณีที่ 3 : มีพหุนามที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าวทั้งหมด 15 พหุนาม

รวมทั้งหมดแล้ว เราจะสามารถสร้างพหุนามในรูปแบบของ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

โดยที่ $a,b,c,d\in\{0,1,2,\ldots\}$ และ สอดคล้องกับเงื่อนไข $2a+b+c+d=4$

ได้ทั้งหมด $1+6+15=22$ แบบ

42. ตอบ 22

สำหรับข้อมูล 11 , 3 , 6 , 3 , 5 , 3 , x จะได้ว่าฐานนิยมจะมีค่าเท่ากับ 3 เสมอ

และจะได้ด้วยว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตจะมีค่าเท่ากับ $\dfrac{11+3+6+3+5+3+x}{7}=\dfrac{31+x}{7}$ เสมอ

เมื่อเราเรียงข้อมูล 11 , 3 , 6 , 3 , 5 , 3 , x จากน้อยไปมากจะสามารถแยกได้เป็นกรณีดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> : $x\le 3$ นั่นคือข้อมูลเราคือ x , 3 , 3 , 3 , 5 , 6 , 11

จะได้ว่า มัธยฐานมีค่าเท่ากับ 3 ซึ่งจะขัดแย้งกับข้อมูลของโจทย์ที่ว่า

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ มีค่าแตกต่างกันทั้งหมด

<u>กรณีที่ 2</u> : $3<x\le 5$ นั่นคือข้อมูลเราคือ 3 , 3 , 3 , x , 5 , 6 , 11

จะได้ว่า มัธยฐานมีค่าเท่ากับ x

ซึ่งเมื่อเรียงค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ใหม่ จากน้อยไปหามาก

จะได้เป็น 3 , x , $\dfrac{31+x}{7}$ ซึ่งโจทย์กำหนดว่าจะเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต

ดังนั้น
$$x-3=\frac{31+x}{7}-x$$
$$2x-3=\frac{31+x}{7}$$
$$14x-21=31+x$$
$$13x=52 \quad \text{นั่นคือ } x=4$$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... KruP'TOON

<u>กรณีที่ 3</u> : $5 < x \le 6$ นั่นคือข้อมูลเราคือ 3 , 3 , 3 , 5 , x , 6 , 11

จะได้ว่า มัธยฐานมีค่าเท่ากับ 5

ซึ่งเมื่อเรียงค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ใหม่ จากน้อยไปหามาก

จะได้เป็น 3 , 5 , $\frac{31+x}{7}$ ซึ่งโจทย์กำหนดว่าจะเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต

ดังนั้น $5-3 = \frac{31+x}{7}-5$

$7 = \frac{31+x}{7}$

$49 = 31+x$ นั่นคือ $x=18$ แต่ขัดแย้งกับข้อมูลที่ว่า $5 < x \le 6$

<u>กรณีที่ 4</u> : $6 < x \le 11$ นั่นคือข้อมูลเราคือ 3 , 3 , 3 , 5 , 6 , x , 11

จะได้ว่า มัธยฐานมีค่าเท่ากับ 5

ซึ่งเมื่อเรียงค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ใหม่ จากน้อยไปหามาก

จะได้เป็น 3 , 5 , $\frac{31+x}{7}$ ซึ่งโจทย์กำหนดว่าจะเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต

จากกรณีที่ 3 จะได้ว่า $x=18$ แต่ขัดแย้งกับข้อมูลที่ว่า $6 < x \le 11$

<u>กรณีที่ 5</u> : $x > 11$ นั่นคือข้อมูลเราคือ 3 , 3 , 3 , 5 , 6 , x , 11

จะได้ว่า มัธยฐานมีค่าเท่ากับ 5

ซึ่งเมื่อเรียงค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ใหม่ จากน้อยไปหามาก

จะได้เป็น 3 , 5 , $\frac{31+x}{7}$ ซึ่งโจทย์กำหนดว่าจะเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต

จากกรณีที่ 3 จะได้ว่า $x=18$

<u>สรุป</u> : ค่า x ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมี 2 ค่าคือ $x=4$ หรือ $x=18$

ดังนั้นผลบวกของค่า x ทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ $4+18=22$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru PTOON

43. ตอบ 0.9

เหตุการณ์ทั้งหมด = วิธีทั้งหมดในการเลือกหนังสือ 3 เล่มจากหนังสือที่แตกต่างกันทั้งหมด 5 เล่ม

$$= \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

เหตุการณ์ที่เราสนใจ = สุ่มหยิบหนังสือมา 3 เล่ม แล้วจะได้หนังสือ ก หรือ หนังสือ ข

= วิธีทั้งหมด − สุ่มหยิบหนังสือมา 3 เล่มแล้วไม่ได้ทั้งหนังสือ ก และหนังสือ ข

$= 10-1 = 9$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้หนังสือ ก หรือ หนังสือ ข $= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{9}{10} = 0.9$

<u>หมายเหตุ</u>

วิธีที่จะสุ่มหยิบหนังสือมา 3 เล่มแล้วไม่ได้ทั้งหนังสือ ก และหนังสือ ข มีเพียง 1 วิธีเท่านั้น คือสุ่มหยิบได้หนังสือ ค , หนังสือ ง และหนังสือ จ

44. ตอบ 43.5

จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ เราสามารถนำมาเขียนเป็นตารางแจกแจงความถี่ได้ดังตารางด้านขวามือนี้

คะแนนสอบ	จำนวนนักเรียน (คน)	ความถี่สะสม
10 - 39	17	17
40 - 49	10	27
50 - 59	3	30

โจทย์กำหนดให้ 10% ของนักเรียนได้เกรด A แปลว่ามีนักเรียนที่ได้เกรด A ทั้งหมด 3 คน

และ 20% ของนักเรียนได้เกรด B แปลว่ามีนักเรียนที่ได้เกรด B ทั้งหมด 6 คน

ดังนั้นมีนักเรียนที่ได้เกรด C ทั้งหมด 21 คน

$\therefore$ คนที่ได้คะแนนสูงสุดของเกรด C คือคนที่ 21 ซึ่งมีนักเรียนที่ได้คะแนนน้อยกว่าหรือเท่ากับคนที่ 21 อยู่ $\frac{21}{30}\times 100 = 70\%$ ดังนั้นคนที่ได้คะแนนสูงสุดของเกรด C ตรงกับ P_{70} พอดี และคนๆนี้ต้องได้คะแนนอยู่ในช่วง 40 - 49 คะแนนแน่นอน

จากสูตร $P_{70} = L + \left(\frac{rN}{100} - \sum f_{\mathrm{L}}\right)\frac{I}{f_P}$

จะได้ว่า $P_{70} = 39.5 + \left(\frac{70(30)}{100} - 17\right)\frac{10}{10} = 39.5 + (21-17)(1) = 43.5$ คะแนน

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

45. ตอบ 33

จากสูตร สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \dfrac{\text{SD.}}{\bar{x}}$

จะได้ว่า $\dfrac{1}{3} = \dfrac{\text{SD.}}{\bar{x}}$ นั่นคือ $\text{SD.} = \dfrac{\bar{x}}{3}$ ..... (1)

คนที่ได้คะแนนสูงสุดของเกรด B คือคนที่ 27 (เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปหามาก)

ซึ่งมีนักเรียนที่ได้คะแนนน้อยกว่าหรือเท่ากับคะแนนของคนๆนี้อยู่ $\dfrac{27}{30} \times 100 = 90\%$

ดังนั้นคนที่ได้คะแนนสูงสุดของเกรด B ตรงกับ P_{90} พอดี (อยู่ในอันตรภาคชั้นที่ 2 ของตาราง)

นั่นคือ $P_{90} = 39.5 + \left(\dfrac{90(30)}{100} - 17\right)\dfrac{10}{10} = 39.5 + (27-17)(1) = 49.5$

จากสูตรของค่ามาตรฐาน $z = \dfrac{x - \bar{x}}{\text{SD.}}$

แทนค่าจากโจทย์จะได้ว่า $1.5 = \dfrac{49.5 - \bar{x}}{\dfrac{\bar{x}}{3}}$ นั่นคือ $\dfrac{1.5\bar{x}}{3} = 49.5 - \bar{x}$

ดังนั้น $1.5\bar{x} = 148.5 - 3\bar{x}$ หรือ $4.5\bar{x} = 148.5$

นั่นคือ $\bar{x} = \dfrac{148.5}{4.5} = 33$

<u>TRICK !!!!</u>

ในกรณีที่ข้อมูลที่เราต้องการหาค่า มีตำแหน่งตรงกับความถี่สะสมของอันตรภาคใดอันตรภาคชั้นหนึ่ง เราสามารถตอบค่าของขอบบนของอันตรภาคชั้นนั้นได้เลย

เช่นข้อนี้ ข้อมูลที่อยู่ในตำแหน่งที่ 27 (ก็คือเปอร์เซ็นไทล์ที่ 90) ตรงกับความถี่สะสมชั้นที่ 2 พอดี ดังนั้น เราจึงสามารถตอบได้เลยว่า เปอร์เซ็นไทล์ที่ 90 มีค่าเท่ากับ 49.5 คะแนน โดยไม่ต้องใช้สูตร

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

46. ตอบ 528

จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดชาย 3 คน และหญิง 3 คน ซึ่งมีนาย ก. และนางสาว ข. รวมอยู่ด้วย ให้ยืนเป็นแถวตรง 2 แถวๆละ 3 คน โดยที่ นาย ก. และนางสาว ข. ไม่ได้ยืนติดกันในแถวเดียวกัน สามารถแยกคิดเป็นกรณีได้ 2 กรณี ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> : นาย ก. และนางสาว ข. ยืนอยู่แถวเดียวกัน แต่ไม่ได้ยืนติดกัน

___ ___ ___ หรือ ___ ___ ___

___ ___ ___ ___ ___ ___

<u>ขั้นที่ 1</u> : นาย ก. และ นางสาว ข. เลือกแถวยืน ได้ 2 วิธี

<u>ขั้นที่ 2</u> : นาย ก. และ นางสาว ข. สลับตำแหน่งกันได้ $2! = 2$ วิธี

<u>ขั้นที่ 3</u> : คนที่เหลือ 4 คน ยืนสลับที่กัน ได้ $4! = 24$ วิธี

สรุป : สามารถยืนได้ $2 \times 2 \times 24 = 96$ วิธี

<u>กรณีที่ 2</u> : นาย ก. และนางสาว ข. ยืนอยู่คนละแถวกัน

___ ___ ___ หรือ ___ ___ ___

___ ___ ___ ___ ___ ___

<u>ขั้นที่ 1</u> : นาย ก. เลือกแถวยืน ได้ 2 วิธี

<u>ขั้นที่ 2</u> : นางสาว ข. ต้องยืนคนละแถวกับ นาย ก. ดังนั้นเลือกแถวยืนได้ 1 วิธี

<u>ขั้นที่ 3</u> : นาย ก. เลือกตำแหน่งที่จะยืนในแถวได้ 3 วิธี

<u>ขั้นที่ 4</u> : นางสาว ข. เลือกตำแหน่งที่จะยืนในแถวได้ 3 วิธี

<u>ขั้นที่ 5</u> : คนที่เหลือ 4 คน ยืนสลับที่กัน ได้ $4! = 24$ วิธี

สรุป : สามารถยืนได้ $2 \times 1 \times 3 \times 3 \times 24 = 432$ วิธี

รวมทั้ง 2 กรณี สามารถยืนได้ $96 + 432 = 528$ วิธี

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

47. ตอบ 343

จากขั้นตอนการหารที่ว่า ตัวตั้ง $=$ (ตัวหาร $\times$ ผลหาร) + เศษ

จากโจทย์จะได้ว่า $1059 = dq_1 + r$ ..... (1)

$1417 = dq_2 + r$ ..... (2)

$2312 = dq_3 + r$ ..... (3)

$(3)-(2)$; $895 = d(q_3 - q_2)$ ..... (4)

$(3)-(1)$; $1253 = d(q_3 - q_1)$ ..... (5)

$(2)-(1)$; $358 = d(q_2 - q_1)$ ..... (6)

จากสมการที่ (4), (5) และ (6) จะเห็นได้ว่า ตัวเลข 895 , 1253 และ 358 มีค่า d เป็นตัวประกอบ

แสดงว่า d = ห.ร.ม. ของ 895 , 1253 และ 358

เนื่องจาก $\left.\begin{array}{l} 895 = 5\times179 \\ 1253 = 7\times179 \\ 358 = 2\times179 \end{array}\right\}$ $\therefore$ d = ห.ร.ม. ของ 895 , 1253 และ 358 = 179

และเนื่องจาก $1059 = 179(5)+164$ แสดงว่าเศษเหลือที่เท่ากันคือ $r = 164$

ดังนั้น $d + r = 179 + 164 = 343$

48. ตอบ 15

เนื่องจากกราฟของ $y = -|x-1-a|+b$ และกราฟ $y = |x-c|-d$ ตัดกันที่จุด $(2,5)$ และ $(8,3)$

แสดงว่าจุด $(2,5)$ และ $(8,3)$ ต้องอยู่บนกราฟทั้ง 2 กราฟ

- พิจารณาจุด $(2,5)$

  เนื่องจากจุด $(2,5)$ อยู่บนกราฟ $y = -|x-1-a|+b$

  จะได้ว่า $5 = -|2-1-a|+b$ นั่นคือ $|a-1| = b-5$ ..... (1)

  และเนื่องจากจุด $(2,5)$ อยู่บนกราฟ $y = |x-c|-d$

  จะได้ว่า $5 = |2-c|-d$ นั่นคือ $|c-2| = d+5$ ..... (2)

- พิจารณาจุด $(8,3)$

  เนื่องจากจุด $(8,3)$ อยู่บนกราฟ $y = -|x-1-a|+b$

  จะได้ว่า $3 = -|8-1-a|+b$ นั่นคือ $|a-7| = b-3$ ..... (3)

  และเนื่องจากจุด $(8,3)$ อยู่บนกราฟ $y = |x-c|-d$

  จะได้ว่า $3 = |8-c|-d$ นั่นคือ $|c-8| = d+3$ ..... (4)

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

$(3)-(1)$; จะได้ว่า $|a-7|-|a-1| = (b-3)-(b-5) = 2$ ..... (5)

- ถ้า $a \le 1$ จะได้ว่า $|a-1| = -(a-1) = 1-a$ และ $|a-7| = -(a-7) = 7-a$

  จากสมการ (5) จะได้ว่า $(7-a)-(1-a) = 2$ นั่นคือ $6=2$ ซึ่งไม่เป็นจริง

- ถ้า $a \ge 7$ จะได้ว่า $|a-1| = a-1$ และ $|a-7| = a-7$

  จากสมการ (5) จะได้ว่า $(a-7)-(a-1) = 2$ นั่นคือ $-6=2$ ซึ่งไม่เป็นจริง

- ถ้า $1<a<7$ จะได้ว่า $|a-1| = a-1$ และ $|a-7| = -(a-7) = 7-a$

  จากสมการ (5) จะได้ว่า $(7-a)-(a-1) = 2$ นั่นคือ $8-2a = 2$ ดังนั้น $a=3$

จากสมการ (1) จะได้ว่า $|3-1| = b-5$ นั่นคือ $b-5 = 2$ ดังนั้น $b=7$

$(2)-(4)$; จะได้ว่า $|c-2|-|c-8| = (d+5)-(d+3) = 2$ ..... (6)

- ถ้า $c \le 2$ จะได้ว่า $|c-2| = -(c-2) = 2-c$ และ $|c-8| = -(c-8) = 8-c$

  จากสมการ (6) จะได้ว่า $(2-c)-(8-c) = 2$ นั่นคือ $-6=2$ ซึ่งไม่เป็นจริง

- ถ้า $c \ge 8$ จะได้ว่า $|c-2| = c-2$ และ $|c-8| = c-8$

  จากสมการ (6) จะได้ว่า $(c-2)-(c-8) = 2$ นั่นคือ $6=2$ ซึ่งไม่เป็นจริง

- ถ้า $2<c<8$ จะได้ว่า $|c-2| = c-2$ และ $|c-8| = -(c-8) = 8-c$

  จากสมการ (6) จะได้ว่า $(c-2)-(8-c) = 2$ นั่นคือ $2a-10 = 2$ ดังนั้น $c=6$

จากสมการ (2) จะได้ว่า $|6-2| = d+5$ นั่นคือ $d+5 = 4$ ดังนั้น $d=-1$

ดังนั้น $a+b+c+d = 3+7+6+(-1) = 15$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON

49. ตอบ 9

โจทย์กำหนดให้ ab เป็นจำนวนสองหลัก แต่ค่าจริงๆของ ab มีค่าเท่ากับ $10a+b$ นะครับ

เช่น 69 เป็นจำนวน 2 หลัก แต่จริงๆแล้ว $69=10(6)+9$

จากสมการ $(310\times ab)-(465\times ba) = 2790$

เราสามารถปรับใหม่ได้เป็น $\left(310\times(10a+b)\right)-\left(465\times(10b+a)\right) = 2790$ ..... (1)

โจทย์กำหนดให้ $a=2b$

จาก (1) จึงได้ว่า $\left(310\times(20b+b)\right)-\left(465\times(10b+2b)\right) = 2790$

$$310(21b)-465(12b) = 2790$$

$$6510b-5580b = 2790$$

$$930b = 2790$$

ดังนั้น $b=3$ และจาก $a=2b$ จึงได้ว่า $a=6$ นั่นคือ $a+b=6+3=9$

50. ตอบ 6

โจทย์กำหนดให้ $a,b,c,d,e,f\in\{0,1,2,\ldots,9\}$

- จาก $a^3-c^2=4$ จะได้ว่ามี (a,c) ที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าวคือ $(a,c)=(2,2)$
- จาก $2^b-d^2=7$ จะได้ว่ามี (b,d) ที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าว

  คือ $(b,d)=(3,1)$ หรือ $(b,d)=(4,3)$ หรือ $(b,d)=(5,5)$
- จาก $e^3-f^2=-1$ จะได้ว่ามี (e,f) ที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าว

  คือ $(e,f)=(0,1)$ หรือ $(e,f)=(2,3)$

ดังนั้น จึงมี (a,b,c,d,e,f) ทั้งหมด $1\times3\times2=6$ แบบ

คือ $(2,3,2,1,0,1)$, $(2,4,2,3,0,1)$, $(2,5,2,5,0,1)$, $(2,3,2,1,2,3)$, $(2,4,2,3,2,3)$

และ $(2,5,2,5,2,3)$

เฉลยข้อสอบ PAT 1 มีนาคม 2555 By ... Kru P'TOON