ملاحظة : أجب عن خمسة أسئلة فقط ولكل سؤال ٢٠ درجة

س1: A) جد قيمة x, y إذا كان $(x+iy)(1-\sqrt{-3}) = -2w - 2w^2$

B) باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبية ، علماً أن طول قطر قاعدته يساوي ارتفاعه وهو $3.99cm$.

س2: A) جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه في نقطة الأصل وبؤرتاه النقطتين $(5,0)$, $(-5,0)$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة .

B) جد قيمة a الحقيقية إذا كان $\int_1^a (x+\frac{1}{2})dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

س3: A) برهن أن مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها .

B) هل أن $y^2 = 3x^2 + x^3$ يمثل حلاً للمعادلة $yy'' + (y')^2 - 3x = 3$

س4 : الإجابة عن فرعين :

A) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل المكافئ $x^2 + 12y = 0$

B) برهن أن الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 4$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وجد قيمة C عند الفترة $[-1,7]$.

C) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

س5: الإجابة عن فرعين :

A) جد الجذور التكعيبية للعدد $(125i)$ باستخدام مبرهنة ديموفوار .

B) عمود طوله $(7.2m)$ في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله $(1.8m)$ مبتعداً عن العمود وبسرعة $(30m/\min)$ ، جد معدل تغير طول ظل الرجل .

C) جد التكامل الآتي : $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

س6 : الإجابة عن فرعين :

A) من مستقيم غير عمودي على مستو معلوم يوجد مستو وحيد عمودي على المستوي المعلوم ، برهن ذلك .

B) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل مقداره $(18m/s^2)$ فإذا كانت سرعته قد أصبحت $(82m/s)$ بعد مرور (4) ثوان من بدء الحركة ، جد : ١- المسافة خلال الثانية الثانية .

٢- بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين .

C) إذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $\forall x > 1$ ومحدبة $\forall x < 1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1,5)$ ، جد قيمة الثوابت $a,b,c \in R$.

س1/ A / جد قيمة x , y اذا كان $(x+iy)(1-\sqrt{3}) = -2\omega - 2\omega^2$

$$(x+iy)(1-i\sqrt{3}) = -2(\omega+\omega^2) \Rightarrow (x+\sqrt{3}y) + (-\sqrt{3}x+y)i = 2$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{3}y = 2 \dots\dots (1)$$

$$-\sqrt{3}x + y = 0 \dots\dots (2)$$

من (1) نحصل على $x = 2-\sqrt{3}y \dots\dots (3)$

الان: نعوض معادلة (3) في معادلة (2) $-\sqrt{3}(2-\sqrt{3}y)+y = 0$

$$\Rightarrow -2\sqrt{3}+3y+y = 0 \Rightarrow -2\sqrt{3}+4y = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الان: نعوض قيمة y في معادلة (3) لإيجاد قيمة x

$$x = 2-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

طريقة أخرى للحل:

$$(x+iy)(1-i\sqrt{3}) = 2 \Rightarrow (x+iy) = \frac{2}{(1-i\sqrt{3})} \cdot \frac{(1+i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow (x+iy) = \frac{2(1+i\sqrt{3})}{1+3}$$

$$\Rightarrow x+iy = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} , \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

B / باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبية . علما ان طول قطر قاعدته يساوي ارتفاعه و هو $3.99\ cm$.

∵ الارتفاع = طول قطر القاعدة

$$h = 2r \Rightarrow r = \frac{1}{2}h \dots\dots (1)$$

نفرض حجم المخروط V

$$V = \frac{\pi}{3}r^2 h \dots\dots (2)$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2) فنحصل على:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h^2}{4}\right)(h) \quad \Rightarrow V = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$Let: b = 3.99 \quad , \quad a = 4 \Rightarrow h = 3.99-4 = -0.01$$

$$V(a) = \frac{\pi}{12}(4)^3 = \frac{\pi}{12}(64) = \frac{64\pi}{3} = 5.3\pi$$

$$V' = \frac{\pi}{4}h^2 \Rightarrow V'(a) = \frac{\pi}{4}(4)^2 = 4\pi$$

$$V(3.99) \cong V(a) + hV'(A)$$

$$V(3.99) \cong 5.3\pi + (-0.01)(4\pi)$$

$$V(3.99) \cong 5.3\pi - 0.04\pi \cong 5.29\pi\ cm^3$$

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

محمد عبد الباسط رزوقي

س2/ A / جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه في نقطة الأصل وبؤرتاه النقطتين $(5,0)$, $(-5,0)$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\because 2a=12 \Rightarrow a=6 \quad , \because c=5 \Rightarrow c^2=25$$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 25=36-b^2$$

$$\Rightarrow b^2=36-25=11$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$$

س2 / B / جد قيمة a الحقيقية اذا كان $\int_1^a\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}sec^2x\,dx$

$$\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^a=2[tanx]_0^{\pi/4} \Rightarrow \left[\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=2\left[\tan\frac{\pi}{4}\right]-[\tan 0]$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+a}{2}-1=2[1-0] \Rightarrow \frac{a^2+a-2}{2}=2$$

$$\Rightarrow a^2+a-6=0$$

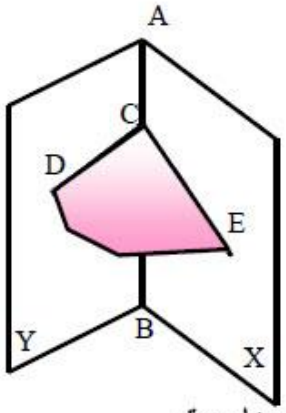
$$\Rightarrow (a+3)(a-2)=0$$

$$either: a=-3$$

$$OR: a=2$$

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

س3 / A / برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عموديا على حرفها.



المعطيات : $\measuredangle DCE$ **هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية**

$(X)-\overline{AB}-(Y)$

المطلوب إثباته: $(DCE)\perp\overline{AB}$

البرهان : $\overline{DC}\perp\overline{AB}$, $\overline{EC}\perp\overline{AB}$ **(من تعريف الزاوية العائدة للزاوية الزوجية)**

$\therefore (DCE)\perp\overline{AB}$ **(جميع الأعمدة المقامة على مستقيم من نقطة تنتمي اليه يحتويها مستو مستو واحد عمودي على ذلك المستقيم من تلك النقطة)**

و.هـ. م.

س3/ B / هل ان $y^2=3x^2+x^3$ يمثل حلا للمعادلة $yy''+(y')^2-3x=3$

$$\because y^2=3x^2+x^3 \Rightarrow 2yy'=6x+3x^2$$

$$\Rightarrow 2y(y'')+y'(2)y'=6+6x \qquad \div 2$$

$$yy''+(y')^2=3+3x$$

$$\Rightarrow y''+(y')^2-3x=3$$

وعليه ان $y^2=3x^2+x^3$ تمثل حلا للمعادلة أعلاه

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

س4 / A / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

$$\because \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1 \Rightarrow a^2=25 \quad , \quad b^2=9$$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=25-9=16 \quad \Rightarrow F(0,\pm 4)$$

بؤرتا القطع الناقص (صاديتان) وتنطبقان على بؤرتي القطع الزائد ⟸ معادلتي القطع الزائد $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

لإيجاد معادلة دليل القطع المكافئ

$$\left.\begin{array}{l} x^2=-12y \\ x^2=-4py \end{array}\right\rangle \Rightarrow -4p=-12 \Rightarrow p=3 \quad \Rightarrow y=3$$

نلاحظ ان بؤرتا القطع الزائد والمكافئ على نفس المحور

$$\Rightarrow a=p=3 \Rightarrow \mathbf{a^2=9}$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 16=9+b^2 \Rightarrow b^2=16-9 \Rightarrow \mathbf{b^2=7}$$

فتكون معادلة القطع الزائد: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

س4 / B / برهن ان الدالة $f(x)=x^2-6x+4$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وجد قيمة c عند الفترة $[-1,7]$

١- الدالة مستمرة على الفترة $[-1,7]$ لأنها دالة كثيرة الحدود

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,7)$ لأنها دالة كثيرة الحدود

٣- ميل المماس $f'(x)=2x-6 \Rightarrow f'(c)=2c-6$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(7)-f(-1)}{7+1}=\frac{11-11}{8}=0$$

ميل المماس = ميل الوتر

$$\Rightarrow 2c-6=0 \Rightarrow c=3 \in [-1,7]$$

س4 / C / جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$

$$2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2} \quad \dots\dots(1)$$

لاحظ هنا ان كلا من البسط والمقام في الطرف الأيمن هو دالة متجانسة ومن الدرجة الثانية

$$Let: y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \quad \dots\dots(2)$$

الان:/ نعوض (2) في (1) فنحصل على

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x^2+x^2v^2}{2x^2}=\frac{x^2(1+v^2)}{2x^2} \quad \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-2v+1}{2}=\frac{(v-1)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dv}{(v-1)^2}=\int\frac{dx}{2x}$$

$$\frac{-1}{v-1}=\frac{1}{2}ln|x|+C'$$

$$v=1-\frac{2}{ln|x|+2C'}$$

الان : نعوض عن $v=\frac{y}{x}$ وبوضع $C=2C'$ في المعادلة الأخير فنحصل على:

$$y=\frac{2x}{ln|x|+C}$$

محمد عبد الباسط رزوقي

س5 / A / جد الجذور التكعيبية للعدد $(125i)$ باستخدام مبرهنة ديموافر

$$Let: Z = 0 + 125i \Longrightarrow \|Z\| = \sqrt{0 + (125)^2} = 125$$

$$\cos\theta = \frac{0}{125} = 0 \ , \ \sin\theta = \frac{125}{125} = 1 \quad \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Z = 125\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Z^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$If\ K = 0 \Longrightarrow Z^{\frac{1}{3}} = 5\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

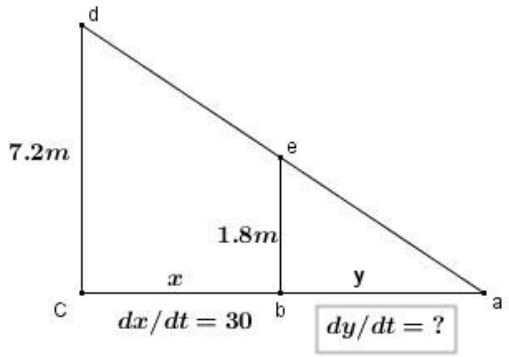
$$If\ K = 1 \Longrightarrow Z^{\frac{1}{3}} = 5\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= 5\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$If\ K = 2 \Longrightarrow Z^{\frac{1}{3}} = 5\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= 5(0, -i)$$

س5/ B / عمود طوله $(7.2\,m)$ في نهايته مصباح يتحرك رجل طوله $(1.8\,m)$ مبتعدا عن العمود وبسرعة $(30\ {}^{m}/_{\min})$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.



نفرض في لحظة ما بُعد الرجل عن العمود $= x$

طول ظل الرجل $= y$

من تشابه المثلثين $acd\,, abe$

$$\frac{7.2}{1.8} = \frac{x+y}{y} \Longrightarrow 4y = x + y$$

$$4y - y = x \Longrightarrow 3y = x$$

$$\therefore 3\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$3\frac{dy}{dt} = 30 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 10\,{}^{m}/_{min}$$

س5/ C / جد التكامل الاتي : $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx$

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx$$

$$= \int \frac{(\cos 2x + \sin 2x)\cancel{(\cos 2x - \sin 2x)}}{\cancel{\cos 2x - \sin 2x}}\,dx$$

$$= \int \cos 2x + \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

محمد عبد الباسط رزوقي

س6/ A / مبرهنة 9 صفحة ٢٤١

س6 / B /

$$1)\ V = \int a(t)dt \Rightarrow V = \int 18\,dt = 18t + C \qquad (V = 82\ t = 4)$$

$$82 = 18(4) + C \ \Rightarrow C = 10$$

عند اية لحظة $V = 18t + 10$

$$d = \left|\int_1^2 18t + 10\,dt\right| = |[9t^2 + 10t]_1^2|$$

$$= |[9(4) + 10(2)] - [9 + 10]|$$

$$= |56 - 19| = 37\ m$$

$$2)\ S = \int_0^2 18t + 10\,dt = [9t^2 + 10t]_0^2 = [56] - [0] = 56\,m$$

س6 / C / $\because$ f مقعرة عند $x > 1$ ومحدبة عند $x < 1$ اذن توجد نقطة انقلاب عند $x = 1$ $f''(x) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + C \quad \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b = 0$$

$$\Rightarrow 3a + b = 0 \ldots\ldots (1)$$

للدالة نهاية عظمى محلية عند $(-1,5)$ $\Leftarrow$ $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + C = 0 \Rightarrow f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \ \ldots\ldots (2)$$

$$\because (-1,5) \in f(x) \Rightarrow 5 = -a + b - c \quad \ldots\ldots (3)$$

نحل (2) , (3) انيا

$$3a - 2b + c = 0$$

$$-a + b - c = 5$$

بالجمع

$$2a - b = 5 \ldots\ldots (4)$$

نحل (1) ,(4) انيا

$$3a + b = 0$$

$$2a - b = 5$$

بالجمع

$$5a = 5 \ \Rightarrow \boldsymbol{a = 1}$$

الان: نعوض عن $a = 1$ في معادلة (4) $\Leftarrow$

$$2(1) - b = 5$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b = -3}$$

نعوض عن $a = 1$, $b = -3$ في معادلة (3) $\Leftarrow$

$$-1 - 3 + c = 5$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C = -9}$$

محمد عبد الباسط رزوقي