

SMP 5
Epreuve de Physique Quantique

Exercice 1 (10 points)

Une particule de masse m est soumise à se déplacer dans le plan xoy . Soient $\hat{R}(X, Y)$ et $\hat{P}(P_x, P_y)$, respectivement, ses opérateurs de position et d'impulsion. Elle est soumise au seul potentiel

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2), \quad \omega \text{ est une constante positive.}$$

- 1- Quel est l'espace des états quantiques de la particule ?
- 2- Montrer que l'hamiltonien H de la particule peut s'écrire sous forme d'une somme de deux hamiltoniens H_x et H_y que l'on déterminera.
- 3- Déterminer les valeurs propres de H ainsi que les états propres correspondants qui leur sont associés (voir l'annexe 1).
- 4- Etudier le degré de dégénérescence des niveaux d'énergie de la particule.
- 5- Donner, en justifiant, deux EOC dans l'espace des états quantiques.
- 6- Supposons que la particule se trouve dans un état tels que sa fonction d'onde (qu'on suppose donnée) est $\Psi(x, y, t)$.
 - a) Que peut-on dire de la mesure simultanée des opérateurs X et P_y ?
 - b) Calculer la probabilité de trouver la particule avec une coordonnée x comprise entre x_1 et x_2 et une composante p_y comprise entre p_1 et p_2 ? (le calcul de l'intégrale n'est demandé)

Exercice 2 (10 points)

Considérons une particule de masse μ soumise au seul potentiel central suivant :

$$V(r) = B r^2, \quad B \text{ est une constante positive.}$$

On note par $\hat{R}(X, Y, Z)$, $\hat{P}(P_x, P_y, P_z)$ et $\hat{L}(L_x, L_y, L_z)$, respectivement, ses opérateurs de position, impulsion et moment cinétique orbital.

- 1- Ecrire l'équation aux valeurs propres de H en $(|\vec{r}\rangle)$, (on l'exprime en fonction de \vec{L}^2 est les coordonnées sphériques r, θ et φ (voir l'annexe 2)).
- 2- Montrer que \vec{L} est une constante de mouvement au sens de la mécanique quantique (voir annexe 2).
- 3- Notons par $\{\Psi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi)\}$ l'ensemble des fonctions propres communes à \hat{H} , \hat{L}^2 et \hat{L}_z . Montrer que $\Psi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$, où $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ est une harmonique sphérique et $R_{k\ell}(r)$ une fonction radiale qui obéit à une équation radiale que l'on déterminera.

4- On pose $\xi = \frac{r^2}{\hbar} \sqrt{2\mu B}$. L'équation radiale devient: $\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{3}{2} \frac{dR}{d\xi} + \frac{1}{4} \left[\alpha - \frac{R(\ell+1)}{\xi} - \xi \right] R = 0$

(ne démontrez pas cette équation radiale)

avec $\alpha = \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{B}}$, où E est une valeur propre de H .

Montrer que, pour $\xi \rightarrow \infty$, $R(\xi) = A \exp(-\xi/2)$, où A est une constante.

5- La fonction radiale $R(\xi)$ satisfait la condition $\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{4} = k$, ($k=0,1,2,3,\dots$)

- En déduire les niveaux d'énergie de la microparticule.
- Calculer le degré de dégénérescence de l'état fondamental et du premier état excité.
- Le système décrit ci-dessus est un oscillateur harmonique isotrope à trois dimensions. En déduire la pulsation ω en fonction de B .

Annexe 1

* Soit H_1 l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique linéaire à une dimension de pulsation ω et de masse m .

- Les valeurs propres de H_1 sont : $E_n = \hbar \omega (n+1/2)$, $n \in \mathbb{N}$
- Les états propres de H_1 sont : $|\varphi_n\rangle = \frac{(a_+^*)^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_{n=0}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$,
où a_+^* est l'opérateur de création et $|\varphi_{n=0}\rangle$ le ket propre associé à la valeur propre E_0 .

Annexe 2

- Le laplacien en coordonnées sphériques : $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$.

- L'action de \hat{L}^2 en $(|\vec{r}\rangle)$ en coordonnées sphériques est :

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

- \hat{H} , \hat{L}^2 et \hat{L}_z sont les actions de H , L^2 et L_z en représentation $(|\vec{r}\rangle)$.

- Soit A un opérateur.

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

Epreuve de Physique Quantique

2014/2015

①

• Enoncé

$$V(x,y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$$

• 1° l'espace des états quantiques de la particule.

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y$$

• 2° $H = T + V(x,y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$

$$H = \frac{\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$$

$$H = \frac{\tilde{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{\tilde{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2$$

Alors H s'écrit sous forme d'une somme de 2 hamiltoniens H_x et H_y

$$H = H_x + H_y \quad \text{avec}$$

H_x agit dans l'espace \mathcal{E}_x
 H_y agit dans l'espace \mathcal{E}_y

• 3° des valeurs propres

$$H | \Phi_{n_1, n_2} \rangle = E_n | \Phi_{n_1, n_2} \rangle$$

$$(H_x + H_y) | \Phi_{n_1, n_2} \rangle = E_n | \Phi_{n_1, n_2} \rangle$$

$$H_x | \Phi_{n_1, n_2} \rangle + H_y | \Phi_{n_1, n_2} \rangle = E_n | \Phi_{n_1, n_2} \rangle$$

$$\hbar \omega (n_1 + \frac{1}{2}) | \Phi_{n_1, n_2} \rangle + \hbar \omega (n_2 + \frac{1}{2}) | \Phi_{n_1, n_2} \rangle = E_n | \Phi_{n_1, n_2} \rangle$$

$$\hbar \omega (n_1 + n_2 + 1) | \Phi_{n_1, n_2} \rangle = E_n | \Phi_{n_1, n_2} \rangle$$

Alors $E_n = \hbar \omega (n_1 + n_2 + 1) = \hbar \omega (n + 1)$ avec $n = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$

• 4° des états propres

$$\Phi_{n_1, n_2}(x,y) = \phi_{n_1}(x) \cdot \phi_{n_2}(y)$$

$$= \frac{(a_1^+)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} | \phi_{n_1=0} \rangle \cdot \frac{(a_2^+)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} | \phi_{n_2=0} \rangle$$

$$= \frac{(a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} | \phi_{n_1=n_1, n_2=n_2=0} \rangle$$

1. état fondamental : $n = n_1 = n_2 = 0 \Rightarrow [1, 0, 0]$
 $E_{00} = \hbar\omega(0 + 0 + 2) = 2\hbar\omega$ et $t_{n,n}(x,y) = t_{0,0}(x,y)$ ②

Donc $\boxed{\deg(E_{00}) = 1}$
état excité : $n = 1 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 1, n_2 = 0 \\ n_1 = 0, n_2 = 1 \end{cases}$

$E_{10} = \hbar\omega(1 + 0 + 1) = 2\hbar\omega$ $t_{n,n}(x,y) = t_{1,0}(x,y)$

Donc $\boxed{\deg E_{10} = 2}$

• $\boxed{\deg E_n = n+1}$

5. $[\tilde{x}, \tilde{p}_y], [\tilde{y}, \tilde{p}_x] \Rightarrow \forall p, q, \tilde{x}, \tilde{p}_x, \tilde{p}_y$ ne sont pas
 dégénérées dans E_n
 Les observables \in l'ensemble
 commutent deux à deux.

6. ① a) $[x, p_y]$ sont simultanément mesurable car $[x, p_y] = 0$

② la probabilité

$P_{\text{prob}}(n_1, n_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{p_{y1}}^{p_{y2}} |\tilde{F}(n, p_y)|^2 dn dy$
 (après réécriture)
 $= \int_{x_1}^{x_2} dn \int_{p_{y1}}^{p_{y2}} dp_y \left| \int_{-\infty}^{+\infty} t(x,y) e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y} dy \right|^2$

(a) $\tilde{F}(n, p_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x,y) e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y} dy$
 $= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)^2 \int_{x_1}^{x_2} dn \int_{p_{y1}}^{p_{y2}} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} |t(x,y)|^2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y} dy$

Qu'on a

avec $\boxed{|2| = 2! e^{i\theta}}$

$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dn \int_{p_{y1}}^{p_{y2}} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} |t(x,y)|^2 dy$

Exercice 2

$$V(r) = Br^2$$

B = une constante positive

1° L'espace $E = E_x \otimes E_y \otimes E_z$

$$2^{\circ} \text{ Hamiltonien } H = H_x + H_y + H_z = \frac{p_x^2}{2\mu} + V(r)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{d}{d\phi} \right) \right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right] + V(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

l'équation de Schrödinger $H|t_{n,l,m}\rangle = E|t_{n,l,m}\rangle$

$$\Rightarrow \langle \vec{r} | H | t_{n,l,m} \rangle = \langle \vec{r} | E | t_{n,l,m} \rangle$$

$$\Rightarrow H | t_{n,l,m}(\vec{r}) \rangle = E | t_{n,l,m}(\vec{r}) \rangle$$

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] t_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = E t_{n,l,m}(r, \theta, \phi)$$

2° Dans l'équation d'Ehrenfest $\frac{d\langle L_i \rangle}{dt} = \langle [L_i, H] \rangle = \langle \frac{\partial L_i}{\partial t} \rangle$

$$\frac{d\langle L_i \rangle}{dt} = 0$$

$$\circ [L_i, H] = [L_i, \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2} 4\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)]$$

$$= [L_i, \frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r)] \quad (\text{avec } i = x, y, z)$$

$$[L_i, H] = [L_i, \frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{d^2}{dr^2}] + [L_i, \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2}] + [L_i, V(r)]$$

et car L_i agit dans l'espace $E_0 = E_0 \otimes E_r$

$$\frac{dr}{dt} = \dots = E_r$$

$$V(r) = \dots = E_r$$

$$[L_i, E_r] = 0$$

$$\Rightarrow [L_i, \frac{dr}{dt}] = 0 \text{ et } [L_i, V(r)] = 0$$

donc $L(x, y, z)$ est une constante de mouvement au sens cl. de Mécanique Quantique.

3. \hat{L}^2 , L_z et H commutent deux à deux
 $\psi(r, \theta, \phi)$ une fonction propre commune de H , L_z et \hat{L}^2 .

a) Soit que $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$$\hat{L}^2|\psi\rangle = l(l+1)\hbar^2|\psi\rangle \quad \text{et}$$

$$L_z|\psi\rangle = m\hbar|\psi\rangle$$

$$\hat{L}^2|K, l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2|K, l, m\rangle$$

$$L_z|K, l, m\rangle = m\hbar|K, l, m\rangle$$

donc

$$\langle K, l, m | H | \psi \rangle = \langle K, l, m | E | \psi \rangle$$

$$\langle K, l, m | \hat{L}^2 | \psi \rangle = \langle K, l, m | l(l+1)\hbar^2 | \psi \rangle$$

$$\langle K, l, m | L_z | \psi \rangle = \langle K, l, m | m\hbar | \psi \rangle$$

$$\begin{aligned} H\psi_{lm}(\theta, \phi) &= E\psi_{lm}(\theta, \phi) \\ \hat{L}^2\psi_{lm}(\theta, \phi) &= l(l+1)\hbar^2\psi_{lm}(\theta, \phi) \\ L_z\psi_{lm}(\theta, \phi) &= m\hbar\psi_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

donc $\psi_{lm}(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) R(r)$

fonction radiale $R(r)$

Partie harmonique sphérique
 $E_2 = E_0 + E_\phi$

4. $E \rightarrow \infty$ à l'infini

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{3}{2r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{4} \left[\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r} - 1 \right] R \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{3}{4} = 0 \quad \text{équation d'ordre 2}$$

$$r^2 \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R(r) = A e^{1/2} + B e^{-1/2}$$

on a besoin de solution qui reste finie à l'infini

avec $A = \text{const}$

Donc $R(r) = A e^{-1/2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{4} = -K \Rightarrow \alpha = 4K + 2\beta + 3 = \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{24}{\beta}}$$

$$\Rightarrow E = \alpha \hbar \sqrt{\frac{\beta}{24}} = \hbar \sqrt{\frac{\beta}{24}} [4K + 2\beta + 3]$$

$$E = \hbar \sqrt{\frac{2\beta}{\hbar}} [2K + \beta + \frac{3}{2}]$$

dégénérescence de l'état fondamental: $n=0 \Rightarrow K=0$, et $l=0$

$$[E_{00} = \hbar \omega (0 + 0 + \frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \hbar \omega] \quad \text{et} \quad [\psi_{K, l, m}(r, \theta, \phi) = \psi_{0, 0, 0}(r, \theta, \phi)]$$

$\Rightarrow g(E_0) = 1$

La dégénérescence de 1^{er} état excité $n=1$ $\left\{ \begin{array}{l} k_z=0 \text{ et } l=1, m_l=1 \\ k_z=\frac{1}{2} \text{ et } l=0, m_l=0 \end{array} \right.$

$$|E_{01} = \hbar\omega \left(n_l + \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{2} \hbar\omega \text{ et}$$

$$\boxed{\text{deg } E_1 = 3}$$

$$+ t_{k_{\text{ex}}} (r, \varphi) \left\{ \begin{array}{l} \psi_{010} \\ \psi_{011} \\ \psi_{01-1} \end{array} \right. \quad (3)$$

$\Rightarrow C''$
$$E_{\text{ex}} = \hbar \sqrt{\frac{2\beta}{M}} \left[2k_z p_z + \frac{3}{2} \right] = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

avec $N = 2k_z p_z$

Donc

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2\beta}{M}}}$$