الدوال الحقيقية

تعيين مجال الدالة من قاعدة تعريفها:

(١) إذا كانت الدالة كثيرة الحدود فإن مجالها ح ما لم تكن معرَّفة على مجموعة جزئية من ح .

(٢) إذا كانت الدالة كسرية جبرية فإن مجالها هو ح − مجموعة أصفار المقام .

(٣) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\sqrt[ن]{ر(س)}$ ، حيث ن ∈ ص$^+$ ، ر(س) كثيرة حدود فإن :

(أ) ن عدد صحيح فردى أكبر من أو يساوى ٣ فإن المجال هو ح

(ب) ن عدد صحيح زوجى أكبر من أو يساوى ٢ فإن المجال هو مجموعة قيم س التى تجعل ر(س) ≥ ٠ .

(٤) إذا كانت الدالة متعددة التعريف (معرَّفة بأكثر من قاعدة) فإن مجالها يساوى مجموعة اتحاد مجالات قواعد هذه الدوال .

العمليات على الدوال:

إذا كانت د ، ر دالتين مجاليهما م$_1$ ، م$_2$ على الترتيب ، فإن :

- (د ± ر) (س) = د(س) ± ر (س) ، ومجال (د$_1$ ± د$_2$) هو م$_1$ ∩ م$_2$
- (د . ر) (س) = د(س) . ر (س) ، مجال (د . ر) هو م$_1$ ∩ م$_2$
- $(\frac{د}{ر})$(س) = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث ر(س) ≠ صفر

مجال $(\frac{د}{ر})$ هو م$_1$ ∩ م$_2$ − ف(ر)

حيث ف(ر) مجموعة أصفار الدالة ر

الدالة الزوجية والدالة الفردية :

إذا كان س ، −س ∈ مجال الدالة د :

(١) الدالة د تسمى دالة زوجية ، إذا كان : د(−س) = د(س) لكل س ، −س ∈ مجال الدالة ويكون الشكل البيانى لها متماثل حول محور الصادات.

(٢) الدالة د تسمى دالة فردية ، إذا كان : د(−س) = − د(س) لكل س ، −س ∈ مجال الدالة ويكون الشكل البيانى لها متماثل حول نقطة الأصل.

الحالات التى تكون فيها الدالة ليست زوجية وليست فردية :

(١) إذا كان الشكل البيانى للدالة غير متماثل حول محور الصادات وغير متماثل حول نقطة الأصل .

(٢) إذا كان د(−س) ≠ د(س) ، د(−س) ≠ − د(س)

(٣) إذا وجدت س ∈ مجال الدالة ولكن −س ∉ مجال الدالة أو العكس .

تركيب دالتين :

إذا كانت د ، ر دالتين فإن (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

حيث مدى الدالة ر ⊂ مجال الدالة د

ويكون مجال (د ∘ ر) فى هذه الحالة هو مجال ر

الدالة الأحادية :

إذا كانت الدالة د حيث :

الدالة د : س ⟵ ص

فإن الدالة تسمى دالة أحادية

إذا كان : لكل أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب) فان أ = ب

أو لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب ، فإن د(أ) ≠ د(ب)

- **اختبار الخط الأفقى:** إذا وجد خط أفقى يقطع الشكل البيانى للدالة فى أكثر من نقطة فإن الدالة لا تكون أحادية .

اطراد الدالة :

لكل س$_1$ ، س$_2$ ∈]أ ، ب[

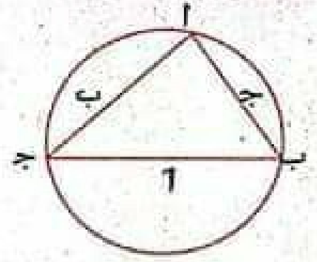
(١) إذا كان لكل س$_1$ > س$_2$ فإن : د(س$_1$) > د(س$_2$) فإن د تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

(٢) إذا كان لكل س$_1$ > س$_2$ فإن : د(س$_1$) < د(س$_2$) فإن د تناقصية فى الفترة]أ ، ب[

(٣) إذا كان لكل س$_1$ > س$_2$ فإن : د(س$_1$) = د(س$_2$) فإن د ثابتة فى الفترة]أ ، ب[

حساب المثلثات

قانون (قاعدة الجيب) :



فى Δ أ ب ج :

$$\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{حا ج}} = 2\,\text{نق}$$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث .

قانون (قاعدة جيب التمام) :

- $\text{أَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - 2\,\text{بَ}\,\text{جَ}\,\text{حتا أ}$ ومنها : $\text{حتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{أَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{جَ}}$
- $\text{بَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{جَ}^2 - 2\,\text{أَ}\,\text{جَ}\,\text{حتا ب}$ ومنها : $\text{حتا ب} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{جَ}}$
- $\text{جَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - 2\,\text{أَ}\,\text{بَ}\,\text{حتا ج}$ ومنها : $\text{حتا ج} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{بَ}}$

الحالات التى يستخدم فيها قانون الجيب :

(١) إذا علم طول ضلع وقياسا زاويتين فى المثلث .

(٢) إذا علم أو طلب طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث .

(٣) إذا علم محيط المثلث وقياسا زاويتين .

الحالات التى يستخدم فيها قانون الجيب :

(١) إذا علم طولا ضلعان فى المثلثان وقياس الزاوية المحصورة بينهما .

(٢) إذا علمت أطوال أضلاع المثلث الثلاثة .

(٣) إذا علمت النسبة بين أطوال أضلاع المثلث الثلاثة .

حل المثلث :

يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا عُلم ثلاث من هذه العناصر منهم طول ضلع على الأقل ويوجد أربع حالات لحل المثلث .

الحالة الأولى إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع نستخدم قانون الجيب .

الحالة الثانية إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما نستخدم قانون جيب التمام .

الحالة الثالثة إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة نستخدم قانون جيب التمام .

الحالة الرابعة إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية غير محصورة (الحالة المبهمة). فى هذه الحالة يمكن وجود مثلثان أو مثلث وحيد أو لا يوجد مثلث على الإطلاق ولتحديد عدد المثلثات الممكنة قبل حل المثلث ينتج الآتى : ليكن لدينا Δ أ ب ج وعلم أَ ، بَ ، ق(أ)

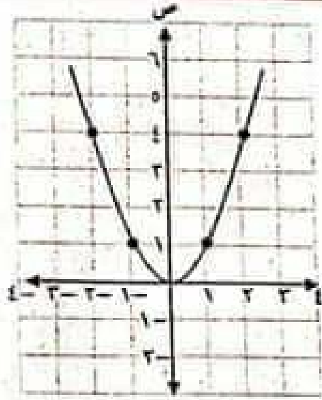
نوجد ل = بَ حا أ ثم نتبع الجدول المقابل :

أ	الشرط	عدد المثلثات
حادة	$0 <$ أَ $<$ ل	صفر
حادة	أَ $=$ ل	١ (قائمة)
حادة	ل $<$ أَ $<$ بَ	٢
حادة	أَ $\geq$ بَ	١
منفرجة	$0 <$ أَ $\leq$ بَ	صفر

التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية

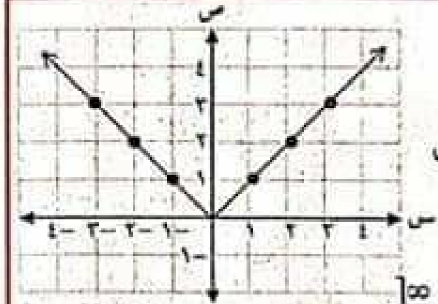
الصور الأساسية لبعض الدوال الحقيقية :

د(س) = س^2 : س ∈ ح



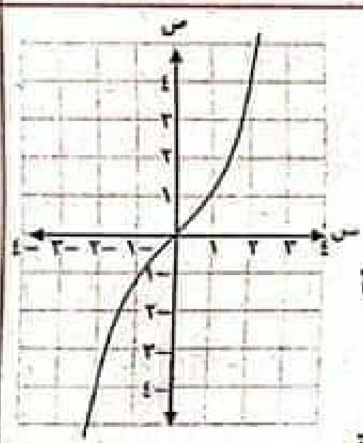
- المجال = ح
- المدى = [٠ ، ∞[
- الدالة زوجية
- الدالة ليست أحادية
- الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[و تزايدية فى]٠ ، ∞[

د(س) = |س| : س ∈ ح



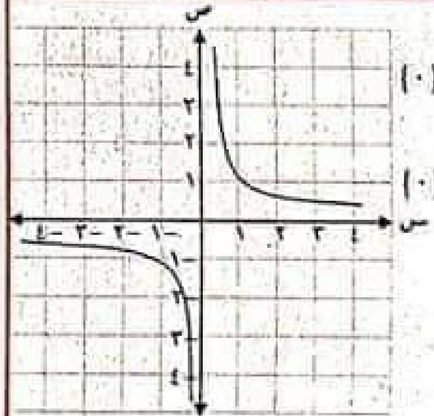
- المجال = ح
- المدى = [٠ ، ∞[
- الدالة زوجية
- الدالة ليست أحادية
- الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[و تزايدية فى]٠ ، ∞[

د(س) = س^3 : س ∈ ح



- المجال = ح
- المدى = ح
- الدالة فردية
- الدالة أحادية
- الدالة تزايدية على مجالها ح

د(س) = $\frac{1}{س}$: س ∈ ح − {٠}



- المجال = ح − {٠}
- المدى = ح − {٠}
- الدالة فردية
- الدالة أحادية
- الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ∞[

إذا كانت د حيث ص = د(س) دالة أساسية فإن منحنى الدالة ر حيث ر(س) = أ(س + ب) + جـ هو نفس منحنى الدالة د مع أجراء التحويلات الهندسية الآن عليه :

ص = أ(س + ب) + جـ

- انعكاس فى محور السينات عند أ < ٠
- إزاحة رأسية |جـ| فى اتجاه $\overrightarrow{و ص}$ عند جـ > ٠ اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ عند جـ < ٠
- إزاحة أفقية |ب| فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ عند ب > ٠ واتجاه $\overrightarrow{و س}$ عند ب < ٠
- انكماش رأسى عند ٠ < |أ| < ١
- تمدد رأسى عند |أ| > ١

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

ملاحظات هامة : إذا كان س ، ص ∈ ح :

(١) |س| ≥ ٠	(٢) |س| = ٠ ⇔ س = ٠
(٣) |س ص| = |س| × |ص|	(٤) |س + ص| ≤ |س| + |ص|
(٥) |س| = |−س|	(٦) |س| = أ ⇔ س = ± أ
(٧) |س| = |ص| ⇔ س = ± ص	(٨) (|س|)^2 = |س^2| = س^2
(٩) لأى س ∈ ح ، $\sqrt{س^2}$ = |س|	(١٠) |س| < أ ⇔ −أ < س < أ
(١١) |س| ≤ أ ⇔ −أ ≤ س ≤ أ	(١٢) |س| > أ ⇔ س > أ أو س < −أ
(١٣) |س| ≥ أ ⇔ س ≥ أ أو س ≤ −أ	

الأسس

الأسس الكسرية والجذر النوني:

إذا كان : أ ∈ ح⁺ ، ه ∈ ص⁺ − {١}

م ∈ ص ، م/ه في أبسط صورة .

• أ^(١/ه) = ه√أ

• أ^(م/ه) = (ه√أ)^م = ه√(أ^م)

المعادلة الأسية:

(١) إذا كان : أ^م = أ^ه ، فإن م = ه

حيث أ ∈ ح − {٠ ، ١ ، −١}

(٢) إذا كان أ^ه = ب^ه ،

فإن : أ = ب : ه فردية

أ = ± ب : ه زوجي

ه = صفر : أ ≠ ب

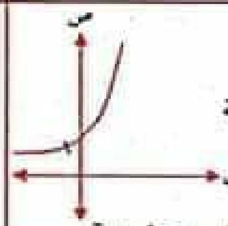
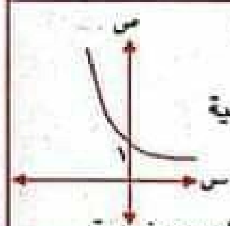
(٣) إذا كان : س^(م/ه) = أ ،

فإن : س = أ^(ه/م) : م فردى

س = ± أ^(ه/م) : م زوجى

الدالة الأسية:

على الصورة : د(س) = أ^س حيث أ ∈ ح⁺ − {١} ، س ∈ ح

د(س) = أ^س ، أ > ٠ ، أ ≠ ١	ر(س) = أ^س ، ٠ < أ < ١
 المجال = ح ، المدى = ح₊ ، الاطراد : تزايدية على مجالها . الدالة : أحادية . ليست زوجية وليست فردية .	 المجال = ح ، المدى = ح₊ ، الاطراد : تناقصية على مجالها . الدالة : أحادية . ليست زوجية وليست فردية .

• لاحظ : منحنى الدالة د والدالة ر كلا منهما صورة للآخر بالانعكاس في محور الصادات .

تطبيقات على الدالة الأسية:

• النمو الأسي : د(ه) = أ(١ + ر)^ه • التضاؤل الأسي : د(ه) = أ(١ − ر)^ه

• الربح المركب : جـ = أ(١ + ر/س)^(ه س)

حيث أ : القيمة الابتدائية ، ه : عدد الفترات الزمنية ، ر : النسبة المئوية للنمو (أو التضاؤل) فى الفترة الزمنية الواحدة ، جـ : جملة المبلغ ، س : عدد فترات التقسيم.

اللوغاريتمات

• إذا كان : أ ∈ ح⁺ ،

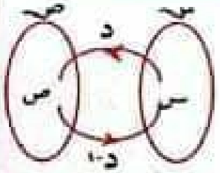
أ ≠ ١ ، فإن : أ^س = ص ⟺ س = لوأ ص

• إذا كان أساس اللوغاريتم يساوى ١٠ فإنه يسمى اللوغاريتم المعتاد ويكتب : لو س

• الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية .

الدالة العكسية:

إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص فإن الدالة د⁻¹ : ص ⟵ س حيث د⁻¹(ص) = س تسمى دالة عكسية للدالة د



ملاحظات:

(١) مجال الدالة د⁻¹ = مدى الدالة د ، مدى الدالة د⁻¹ = مجال الدالة د

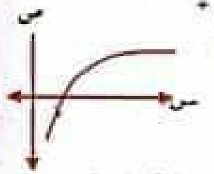
(٢) الدالتان د ، د⁻¹ متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س عند تمثيلهما بيانيًا .

(٣) إذا كان : (د ∘ ر)(س) = (ر ∘ د)(س) = س فإن كل من د ، ر دالة عكسية للأخرى.

الدالة اللوغاريتمات: على الصورة : د(س) = لوأ س

حيث أ ∈ ح⁺ − {١} ، س ∈ ح⁺

• خواص الدالة اللوغاريتمية :



• د(س) = لوأ س ، أ > ١

المجال = ح⁺ ، المدى = ح

الاطراد : تزايدية على ح⁺ ، الدالة أحادية .

الدالة ليست زوجية وليست فردية

• د(س) = لوأ س ، ٠ < أ < ١

المجال = ح⁺ ، المدى = ح

الاطراد : تناقصية على ح⁺ ، الدالة أحادية .

الدالة ليست زوجية وليست فردية .

قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان ∈ ح⁺ − { ١ } ، س ∈ ح⁺ ، ص ∈ ح⁺ .

فإن : (١) لوأ أ = ١ ، (٢) لوأ ١ = صفر (٣) لوأ س ص = لوأ س + لوأ ص

(٤) لوأ (س/ص) = لوأ س − لوأ ص (٥) لوأ س^ه = ه لوأ س

(٦) لوص س = لوأ س / لوأ ص : ص ≠ ١ (٧) لوص س = ١ / لوس ص

حيث س ≠ ١ ، ص ≠ ١

النهايات

نهاية دالة عند نقطة :

لإيجاد $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) : نوجد د(أ) بالتعويض المباشر:

د(أ) = ل (عدد حقيقي)	د(أ) = $\frac{\text{عدد حقيقي} \neq ٠}{\text{صفر}}$ (كمية غير معرفة)	د(أ) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معرفة)

$\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) = ل

$\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) غير موجودة

- التحليل
- القسمة المطولة
- الضرب فى المرافق
- النظرية : $\frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن\, أ^{ن-١}$
- النتيجة : $\underset{س \to أ}{نهـا} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن-م}$

نهاية الدالة عند اللانهاية :

- $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{١}{س}$ = صفر
- $\underset{س \to -\infty}{نهـا} \frac{١}{س}$ = صفر
- $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{أ}{س^ن}$ = صفر ؛ ن $\in$ $ح^+$

نهايات الدوال المثلثية :

- $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حاس}{س} = ١$ ، • $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$
- $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{طاس}{س} = ١$ ، • $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{طا أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

(٢) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١ - حتاس}{س}$ = صفر (س بالتقدير الدائرى)

بحث نهاية الدالة مجزأة المجال :

يكون للدالة د نهاية عند النقطة أ إذا كانت نهايتاها اليمنى واليسرى عند أ موجودتين ومتساويتين : د($أ^+$) = د($أ^-$) = ل فإن $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) = ل

الاتصال

اتصال دالة عند نقطة :

الدالة د متصلة عند س = أ إذا كان :

(١) د(أ) = ل

أى د معرفة عند أ

(٢) $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) موجودة .

(٣) $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) = ل

اتصال دالة على فترة :

إذا كانت الدالة معرفة على الفترة (ف) حيث :

أولاً : ف =]أ ، ب[(فترة مفتوحة) فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقط تنتمى لهذه الفترة .

ثانيًا : ف = [أ ، ب] (فترة مغلقة) فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت

- د متصلة على]أ ، ب[
- د متصلة من اليمين عند أ ، اى د(أ) = د($أ^+$)
- د متصلة من اليسار عند ب ، اى د(ب) = د($ب^+$)

إعادة تعريف الدالة الغير متصلة لكى تكون متصلة عند هذه النقطة :

- إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = أ بسبب أن د(أ) غير معرفة ، د(أ) ≠ $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) (موجودة) ، فإنه يمكن إعادة التعريف بجعل د(أ) = $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س)
- إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = أ بسبب أن $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) غير موجودة ، فإنه لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = أ

بعض أنماط الدوال المتصلة :

- **الدالة كثيرة الحدود** متصلة على ح أو اى فترة جزئية منها .
- **الدالة الكسرية د** : د(س) = $\frac{ر(س)}{ه(س)}$ حيث ه ، ر كثيرتا حدود متصلة على ح ـ أصفار الدالة ه أو أى فترة جزئية منها.
- **الدوال المثلثية** : دالة الجيب وجيب التمام متصلتان على ح أو أى فترة جزئية منها : دالة الظل متصلة على ح - {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن $\in$ ص}