

Examen

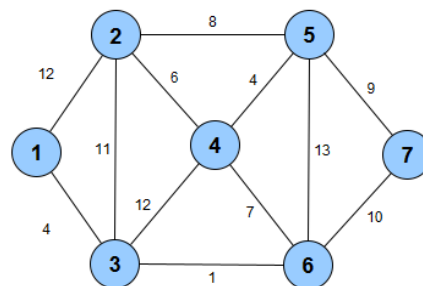
Durée : 1 h 45

Nom :	Num d'inscription :	
Prénom :	Section :	Groupe :

Exercise 1 (4 points)

On considère le graphe pondéré suivant avec les poids sur les arêtes:

- 1) Donner l'arbre couvrant de poids minimum en appliquant au choix l'un des algorithmes de recherche d'un arbre couvrant de poids minimum (**Kruskal** ou **Prim**).

[illegible]

Exercice 2 (6 points)

Soit le graphe orienté **G** présenté par la figure ci dessous :

1) Donnez la matrice d'adjacence correspondante de G.

.....

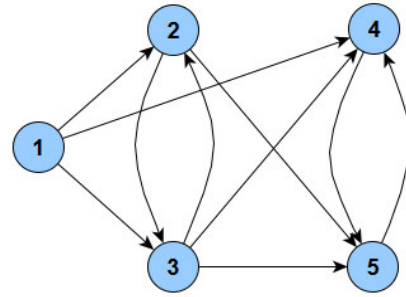
.....

.....

.....

.....

.....



G

2) Donner la représentation machine (tables des successeurs) correspondante de **G**.

.....

.....

.....

.....

3) Est-ce qu'il existe une relation de forte connexité entre le sommet 2 et le sommet 4? Justifiez votre réponse.

.....

.....

.....

.....

4) En appliquant l'algorithme de décomposition, décomposer le graphe **G** suivant en composantes fortement connexes. Donner le graphe réduit.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3 (5 points)

Considérons un ensemble de 5 villes nommées V1, V2, V3, V4, et V5. Les tronçons de routes reliant les villes sont représentées par la matrice suivante telle que la case située à l'intersection de la ligne **i** et de la colonne **j** contient un entier égal à la longueur en kilomètres du tronçon de route reliant la ville **Vi** avec la ville **Vj** (on suppose que les routes sont en sens unique). Une case vide veut dire qu'il n'existe pas de route entre les deux villes.

1) Représenter au moyen d'un graphe cette situation (représentation graphique).

	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅
V ₁		8		10	
V ₂			5	12	20
V ₃					19
V ₄			14		11
V ₅					

.....

.....

.....

.....

2) En utilisant le graphe obtenu, est il possible de partir de la ville V1 et d'y revenir en passant par chaque ville une et une seule fois ? à quoi correspond la solution en termes de concepts liés à la théorie des graphes ? Justifier Votre réponse.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) Quel est le chemin le plus court qui relie la ville V1 avec toute les autres villes? (Utiliser l'algorithme le mieux adapté). Justifier votre choix.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4 (5 points)

1. Soit G un graphe connexe eulérien.
- a) Est-il toujours possible de rendre G non eulérien en lui enlevant des arêtes ? Justifiez votre réponse.

.....

.....

.....

.....

.....

- b) Combien d'arêtes au minimum doit-on enlever de G pour le rendre non Eulérien. Justifiez votre réponse.

.....

.....

.....

.....

.....

2. Est-il possible de construire un graphe simple avec 6 sommets et 21 arêtes ? Justifier.

.....

.....

.....

.....

.....

3. Est-il possible de construire un graphe 5-régulier avec 8 sommets ? Justifier.

.....

.....

.....

.....

.....

Examen

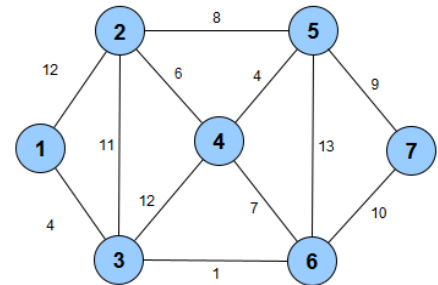
Durée : 1 h 45

Nom :	Num d'inscription :	
Prénom :	Section :	Groupe :

Exercice 1 (4 points)

On considère le graphe pondéré suivant avec les poids sur les arêtes:

- 1) Donner l'arbre couvrant de poids minimum en appliquant au choix l'un des algorithmes de recherche d'un arbre couvrant de poids minimum (**Kruskal** ou **Prim**).



Solution

Prim (0.5+2+ 1.5)

$S \leftarrow \{1\}$; $P(T) \leftarrow 0$; $X \leftarrow \emptyset$;

$S = \{1\}$: $uv = 13$, $X \leftarrow X \cup \{13\}$, $p(T) \leftarrow p(T) + p(13) = 0 + 4 = 4$, $S \leftarrow S \cup \{3\}$

$S = \{1, 3\}$: $uv = 36$, $X \leftarrow X \cup \{36\}$, $p(T) \leftarrow p(T) + p(36) = 4 + 1 = 5$, $S \leftarrow S \cup \{6\}$

$S = \{1, 3, 6\}$: $uv = 64$, $X \leftarrow X \cup \{64\}$, $p(T) \leftarrow p(T) + p(64) = 5 + 7 = 12$, $S \leftarrow S \cup \{4\}$

$S = \{1, 3, 6, 4\}$: $uv = 45$, $X \leftarrow X \cup \{45\}$, $p(T) \leftarrow p(T) + p(45) = 12 + 4 = 16$, $S \leftarrow S \cup \{5\}$

$S = \{1, 3, 6, 4, 5\}$: $uv = 42$, $X \leftarrow X \cup \{42\}$, $p(T) \leftarrow p(T) + p(42) = 16 + 6 = 22$, $S \leftarrow S \cup \{2\}$

$S = \{1, 3, 6, 4, 5, 2\}$: $uv = 57$, $X \leftarrow X \cup \{57\}$, $p(T) \leftarrow p(T) + p(57) = 22 + 9 = 31$, $S \leftarrow S \cup \{7\}$

$S = \{1, 3, 6, 4, 5, 2, 7\} = V \Rightarrow$ fin de l'algorithme.

$T = (S, X)$ avec $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $X = \{13, 36, 64, 45, 42, 57\}$

Kruskal (0.5+2+ 1.5)

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
(x,y)	(3,6)	(1,3)	(4,5)	(2,4)	(4,6)	(2,5)	(5,7)	(6,7)	(2,3)	(3,4)	(1,2)	(6,5)
$P(e_i)$	1	4	4	6	7	8	9	10	11	12	12	13

$X \leftarrow \emptyset$; $i \leftarrow 1$; $P(T) \leftarrow 0$;

$i=1$: $(V, X \cup \{e_1\})$ est acyclique **alors** $X \leftarrow X \cup \{e_1\}$; $P(T) \leftarrow P(T) + 1 = 1$; $i \leftarrow i + 1$;

$i=2$: $(V, X \cup \{e_2\})$ est acyclique **alors** $X \leftarrow X \cup \{e_2\}$; $P(T) \leftarrow 1 + 4 = 5$; $i \leftarrow i + 1$;

$i=3$: $(V, X \cup \{e_3\})$ est acyclique **alors** $X \leftarrow X \cup \{e_3\}$; $P(T) \leftarrow 5 + 4 = 9$; $i \leftarrow i + 1$;

$i=4$: $(V, X \cup \{e_4\})$ est acyclique **alors** $X \leftarrow X \cup \{e_4\}$; $P(T) \leftarrow 9+6=15$; $i \leftarrow i+1$;
 $i=5$: $(V, X \cup \{e_5\})$ est acyclique **alors** $X \leftarrow X \cup \{e_5\}$; $P(T) \leftarrow 15+7=22$; $i \leftarrow i+1$;
 $i=6$: $(V, X \cup \{e_6\})$ contient un cycle ; $i \leftarrow i+1$;
 $i=7$: $(V, X \cup \{e_7\})$ est acyclique **alors** $X \leftarrow X \cup \{e_7\}$; $P(T) \leftarrow 22+9=31$; $i \leftarrow i+1$;
 $i=$: $X=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7\} \Rightarrow |X| = 6 = |V|-1$ alors fin de l'algorithme et le résultat est un arbre $T=(V, X)$ avec un poids minimum $P(T)=31$.
 $V=\{1, 3, 6, 4, 5, 2, 7\}$; $X=\{36, 13, 45, 24, 46, 57\}$

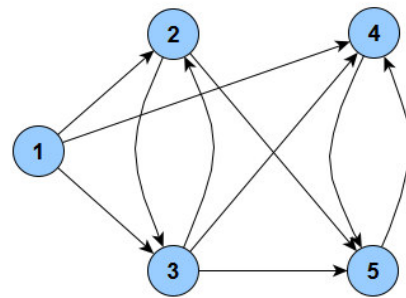
Exercice 2 (1+1+1+2+1 points)

Soit le graphe orienté G présenté par la figure ci dessous :

1) Donnez la matrice d'adjacence correspondante de G .

Solution

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	1	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0



G

2) Donner la représentation machine (tables des successeurs) correspondante de G .

Solution

	1	2	3	4	5
PS	1	4	6	9	10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LS	4	2	3	3	5	2	4	5	5	4

3) Est-ce qu'il existe une relation de forte connexité entre le sommet 2 et le sommet 4? Justifiez votre réponse.

Solution

Non il n'existe pas une relation de forte connexité entre le sommet 2 et le sommet 4 car il existe un chemin du sommet 2 vers le sommet 4 mais il n'existe pas un chemin du sommet 4 vers le sommet 2 et pour dire qu'il y a une relation de forte connexité entre un sommet x et un sommet y on doit avoir un chemin de x vers y et un chemin de y vers x .

4) En appliquant l'algorithme de décomposition, décomposer le graphe **G** suivant en composantes fortement connexes. Donner le graphe réduit.

Solution

$$X \leftarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$v \leftarrow 1$$

$$D(1) \leftarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A(1) \leftarrow \{1\}$$

$$C(1) \leftarrow D(1) \cap A(1) = \{1\}$$

$$X \leftarrow X / C(1) = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$v \leftarrow 2$$

$$D(2) \leftarrow \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A(2) \leftarrow \{2, 3\}$$

$$C(2) \leftarrow D(2) \cap A(2) = \{2, 3\}$$

$$X \leftarrow X / C(2) = \{4, 5\}$$

$$v \leftarrow 4$$

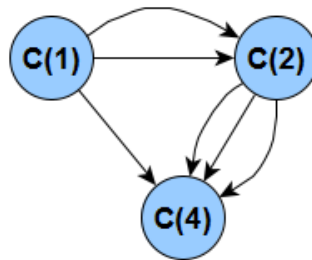
$$D(4) \leftarrow \{4, 5\}$$

$$A(2) \leftarrow \{4, 5\}$$

$$C(2) \leftarrow D(2) \cap A(2) = \{4, 5\}$$

$$X \leftarrow X / C(2) = \emptyset \Rightarrow \text{fin de l'algorithme.}$$

Graphe réduit

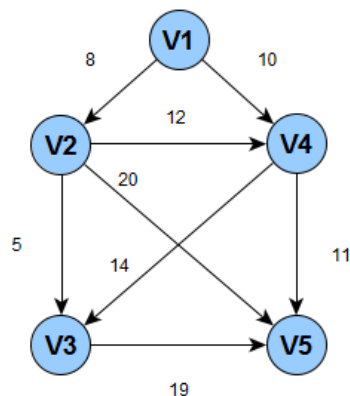


Exercice 3 (5 points)

Considérons un ensemble de 5 villes nommées V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , et V_5 . Les tronçons de routes reliant les villes sont représentées par la matrice suivante telle que la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j contient un entier égal à la longueur en kilomètres du tronçon de route reliant la ville V_i avec la ville V_j (on suppose que les routes sont en sens unique). Une case vide veut dire qu'il n'existe pas de route entre les deux villes.

1) Représenter au moyen d'un graphe cette situation (représentation graphique).

Solution (1 Pts)



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1		8		10	
V_2			5	12	20
V_3					19
V_4			14		11
V_5					

- 2) En utilisant le graphe obtenu, est-il possible de partir de la ville V1 et d'y revenir en passant par chaque ville une et une seule fois ? à quoi correspond la solution en termes de concepts liés à la théorie des graphes ? Justifier votre réponse.

Solution (0.25+0.25+0.5 Pts)

Non il n'est pas possible de partir de la ville V1 et d'y revenir en passant par chaque ville une et une seule fois. La solution correspond à trouver un circuit Hamiltonien, dans le graphe de l'exemple il n'existe pas un circuit Hamiltonien car si on prend le sommet V1 (correspondant à la ville V1) on remarque que c'est une source donc on ne peut pas revenir à ce sommet donc impossible de construire un circuit Hamiltonien sans ce graphe.

- 3) Quel est le chemin le plus court qui relie la ville V1 avec toutes les autres villes ? (Utiliser l'algorithme le mieux adapté). Justifier votre choix.

Solution 1 (0.5 + 1.5 + 1 Pts)

Comme le ne contient pas de circuit on peut appliquer l'algorithme de **Bellman**.

Initialisation $S \leftarrow \{V1\}; \pi(V1) \leftarrow 0; \forall x \in V, x \neq V1, \pi(x) \leftarrow +\infty; \text{Arc} \leftarrow \emptyset;$

- $x = V2 : \pi(V2) \leftarrow \pi(V1) + l((V1, V2)) = 0 + 8, S \leftarrow S \cup \{V2\}, \text{Arc} \leftarrow \text{Arc} \cup \{(V1, V2)\}.$
- $x = V4 : \pi(V4) \leftarrow \min[\pi(V1) + l((V1, V4)); \pi(V2) + l((V2, V4))] = \pi(V1) + l((V1, V4)) = 0 + 10 = 10 ; S \leftarrow S \cup \{V4\}; \text{Arc} \leftarrow \text{Arc} \cup \{(V1, V4)\};$
- $x = V3 : \pi(V3) \leftarrow \min[\pi(V4) + l((V4, V3)); \pi(V2) + l((V2, V3))] = \pi(V2) + l((V2, V3)) = 8 + 5 = 13 ; S \leftarrow S \cup \{V3\}; \text{Arc} \leftarrow \text{Arc} \cup \{(V2, V3)\};$
- $x = V5 : \pi(V5) \leftarrow \min[\pi(V4) + l((V4, V5)); \pi(V3) + l((V3, V5))] = \pi(V4) + l((V4, V5)) = 10 + 11 = 21 ; S \leftarrow S \cup \{V5\}; \text{Arc} \leftarrow \text{Arc} \cup \{(V4, V5)\};$
- $S = V$ Fin de l'algorithme
 $\text{Arc} = \{(V1, V2), (V1, V4), (V2, V3), (V4, V5)\}$

Solution 2 (0.5 + 1.5 + 1 Pts)

Comme le graphe ne contient pas de poids négatifs on peut appliquer l'algorithme de **Dijkstra**.

Initialisation

$S \leftarrow \{V1\}; \pi(V1) \leftarrow 0; \forall x \in V, x \neq V1, \pi(x) \leftarrow +\infty; \text{Arc}(x) \leftarrow \emptyset; \text{arrêt} \leftarrow \text{faux}$

Itération1 $x = V1$

- $Y = V2 : \pi(V1) + l((V1, V2)) = 0 + 8 = 8 < \pi(V2) = +\infty \Rightarrow \pi(V2) \leftarrow \pi(V1) + l((V1, V2)) = 8; \text{Arc}(V2) \leftarrow \{(V1, V2)\}.$
- $Y = V4 : \pi(V1) + l((V1, V4)) = 0 + 10 = 10 < \pi(V4) = +\infty \Rightarrow \pi(V4) \leftarrow \pi(V1) + l((V1, V4)) = 10; \text{Arc}(V4) \leftarrow \{(V1, V4)\}.$

Choisir un sommet $z : z \leftarrow V2 ; S \leftarrow S \cup \{V2\} ; x \leftarrow V2 .$

Itération2 $x = V2$

- $Y=V3 : \pi(V2) + 1((V2, V3)) = 8 + 5 = 13 < \pi(V3) = +\infty \Rightarrow \pi(V3) \leftarrow \pi(V2) + 1((V2, V3)) = 13;$
 $\text{Arc}(V3) \leftarrow \{(V2, V3)\}.$
- $Y=V4 : \pi(V2) + 1((V2, V4)) = 8 + 12 = 20 > \pi(V4) = 10.$
- $Y=V5 : \pi(V2) + 1((V2, V5)) = 8 + 20 = 28 < \pi(V5) = +\infty \Rightarrow \pi(V5) \leftarrow \pi(V2) + 1((V2, V5)) = 28;$
 $\text{Arc}(V5) \leftarrow \{(V2, V5)\}.$

Choisir un sommet $z : z \leftarrow V4 ; S \leftarrow S \cup \{V4\} ; x \leftarrow V4 .$

Itération3 $x = V4$

- $Y=V3 : \pi(V4) + 1((V4, V3)) = 20 + 14 = 24 > \pi(V3) = 13$
- $Y=V5 : \pi(V4) + 1((V4, V5)) = 10 + 11 = 21 < \pi(V5) = 28 \Rightarrow \pi(V5) \leftarrow \pi(V4) + 1((V4, V5)) = 21;$
 $\text{Arc}(V5) \leftarrow \{(V4, V5)\}.$

Choisir un sommet $z : z \leftarrow V3 ; S \leftarrow S \cup \{V3\} ; x \leftarrow V3 .$

Itération4 $x = V3$

- $Y=V5 : \pi(V3) + 1((V3, V5)) = 13 + 19 = 32 > \pi(V5) = 21$

Choisir un sommet $z : z \leftarrow V5 ; S \leftarrow S \cup \{V5\} ; x \leftarrow V5 .$

$S = V \Rightarrow \text{arrêt} \leftarrow \text{vrai} \Rightarrow \text{Fin de l'algorithme}.$

$\text{Arc} = \{(V1, V2), (V1, V4), (V2, V3), (V4, V5)\}$

Exercice 4 (1.25 * 4 points)

1. Soit G un graphe connexe eulérien.

a) Est-il toujours possible de rendre G non eulérien en lui enlevant des arêtes ? Justifiez votre réponse.

Solution (0.5+0.75 Pts)

Oui il est possible de rendre G non eulérien en lui enlevant des arêtes car dans un graphe eulérien tout les sommets sont de degré pair donc il suffit de rendre des sommets de degrés pair en sommets de degré impair, si on supprime une arête entre un sommet x et un sommet y on aura deux sommets de degrés impairs de la même manière si on enlève une deuxième arête et cela augmentera le nombre de sommets de degrés impairs dans le graphe et le graphe n'est plus eulérien.

b) Combien d'arêtes au minimum doit-on enlever de G pour le rendre non Eulérien. Justifiez votre réponse.

Solution (0.5+ 0.75 Pts)

Le nombre d'arêtes au minimum doit-on enlever de G pour le rendre non Eulérien est une arête car la suppression d'une arête entre un sommet x et un sommet y permet de rendre les deux sommets ayant un degré impair et le graphe n'est plus eulérien il est semi eulérien..

2. Est-il possible de construire un graphe simple avec 6 sommets et 21 arêtes ? Justifier.

Solution (0.5+ 0.75 Pts)

Non il n'est pas possible car on a :

Si le graphe est simple alors $\forall x \in V, d_g(x) \leq n-1$ si on somme $\Rightarrow \sum_{i=1}^n d_g(x) \leq \sum_{i=1}^n n-1 \Rightarrow 2m \leq n(n-1)$
 dans notre cas $n=6 \Rightarrow 2m \leq 6*5 \Rightarrow 2m \leq 30 \Rightarrow m \leq 15 \Rightarrow n=6$ et $m=21$ est une **situation impossible**

3. Est-il possible de construire un graphe 5-régulier avec 8 sommets ? Justifier.

Solution (0.5+ 0.75 Pts)

Oui il est possible car on a : $n=8$ et le graphe est 5 régulier $\Rightarrow \forall x \in V, d_g(x) = 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^n d_g(x) = \sum_{i=1}^8 5 = 8*5 = 40$ qui est un nombre pair \Rightarrow condition vérifiée.