

# Résolution d'équations

## Position du problème

Soit  $F$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$   
dont le domaine de définition est une  
partie  $D$  de  $\mathbb{R}$ , le problème est  
de trouver tous les éléments  $n \in D$ , qui  
vérifient  $F(n) = 0$ . --- (1)

C'est ce qu'on appelle résoudre l'équation  
(1), en d'autres termes on cherche à  
représenter l'ensemble:

$$K \text{ et } F = \{ n \in D \mid F(n) = 0 \}$$

appelé le noyau de  $F$ .

Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27	4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28	6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26	3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28

Si  $r \in \text{ker } F$ ,  $r$  est dite racine de (1).  
Il n'est pas possible de résoudre  
complètement ce problème quelle que  
soit la forme de  $F$

Exemples:

1)  $D = \mathbb{R}$ ,  $F(n) = an^2 + bn + c$

$$\text{ker } F = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \Delta < 0 \\ \left\{ \frac{-b}{2a} \right\} & \text{si } \Delta = 0 \\ \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\} & \text{si } \Delta > 0 \end{cases}$$

2)  $D = \mathbb{R}$ ,  $F(n) = \sin n$

$$\text{ker } F = \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

3)  $D = \mathbb{R}$ ,  $F(n) = \begin{cases} \sin \frac{1}{n} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$

Janvier	
6	13 20 27
7	14 21 28
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24 31
4	11 18 25
5	12 19 26

Février	
3	10 17 24
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28
1	8 15 22
2	9 16 23

Mars	
3	10 17 24 31
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30

Avril	
7	14 21 28
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27

Mai	
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24 31
4	11 18 25

Juin	
7	9 16 23 30
3	10 17 24
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28
1	8 15 22 29



$$\text{Ker } F = \left\{ \frac{1}{KIT} \right\} \text{ / } \text{KGZ}^* \text{ } \left\{ \text{VIR} \right\}$$

Def 1, on dira qu'une racine  $r$  de  $F(x) = 0$ , est séparable, si l'on peut trouver un intervalle  $[a, b]$  tq  $r$  soit la seule racine dans  $[a, b]$ , on écrit:  
 $\text{Ker } F \cap [a, b] = \{r\}$

Exple 1), 2), 3)

Séparation des racines.

en dehors de l'étude théorique de  $F$ , on utilise deux types de méthodes:  
 une méthode graphique, et une méthode de balayage.

02h00	
04h00	
06h00	
08h00	
10h00	
12h00	
14h00	
16h00	
18h00	

juillet	août	septembre	octobre	novembre	décembre
1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27	4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28	6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26	3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28

# 1) Méthode graphique

a) on peut tracer le graphe de la fonction  $F$  et on cherche les points d'intersection avec l'axe (OX).

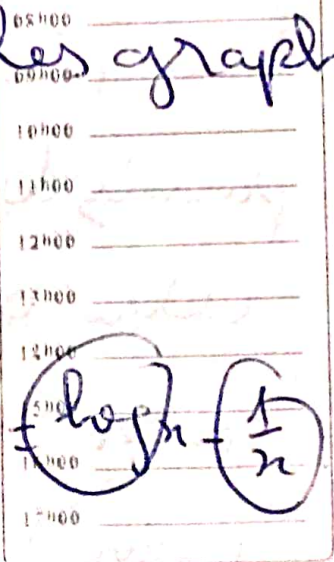
b) si on peut décomposer  $F$  en deux fonctions telles que:

$F = F_1 - F_2$  et chercher ensuite les points d'intersection entre les graphes de  $F_1$  et  $F_2$

Exemple:  $n \log n = 1, n > 0$

$$F(n) = n \log n - 1, F(n)$$

$$F_1(n) = \log n, F_2(n) = \frac{1}{n}$$



Janvier				Février				Mars				Avril				Mai				Juin								
Di	6	13	20	27	Di	3	10	17	24	Di	3	10	17	24	31	Di	7	14	21	28	Di	9	16	23	30			
Lu	7	14	21	28	Lu	4	11	18	25	Lu	4	11	18	25		Lu	1	8	15	22	29	Lu	3	10	17	24		
Ma	1	8	15	22	29	Ma	5	12	19	26	Ma	5	12	19	26	Ma	2	9	16	23	30	Ma	4	11	18	25		
Me	2	9	16	23	30	Me	6	13	20	27	Me	6	13	20	27	Me	3	10	17	24		Me	5	12	19	26		
Je	3	10	17	24	31	Je	7	14	21	28	Je	7	14	21	28	Je	4	11	18	25		Je	6	13	20	27		
Va	4	11	18	25		Va	1	8	15	22	29	Va	1	8	15	22	Va	5	12	19	26		Va	7	14	21	28	
So	5	12	19	26		So	2	9	16	23	30	So	2	9	16	23	So	6	13	20	27		So	1	8	15	22	29



## Méthode de balayage

on considère une suite finie  $(x_i)_{i=0, \dots, n}$   
de valeurs réparties sur l'intervalle  
 $[a, b]$

si  $F$  est continue et si  $F(n_i) \cdot F(n_{i+1}) < 0$   
alors il existe entre  $n_i$  et  $n_{i+1}$  au  
moins une racine de  $F(x) = 0$ .

(c) Sur le TH des valeurs intermédiaires la méthode consiste donc à détecter parmi les conti<sup>tes</sup>  $F(n_i)$ ,  $F(n_{i+1})$ , etc. celle qui soit négatives.

Row  $\varepsilon > 0$   $\mu_i(n_{i_0+1} - n_{i_0}) < \varepsilon$  on

1	2	14	21	28
7	8	15	22	29
2	9	16	23	30
3	10	17	24	31
4	11	18	25	
5	12	19	26	
6	13	20	27	

	Aout			
31	4	11	18	25
30	5	12	19	26
29	6	13	20	27
28	7	14	21	28
27	1	8	15	22
26	2	9	16	23
25	3	10	17	24

	1	8	15	22	29
2	5	16	23	30	
3	10	17	24		
4	11	18	25		
5	12	19	26		
6	13	20	27		
7	14	21	28		

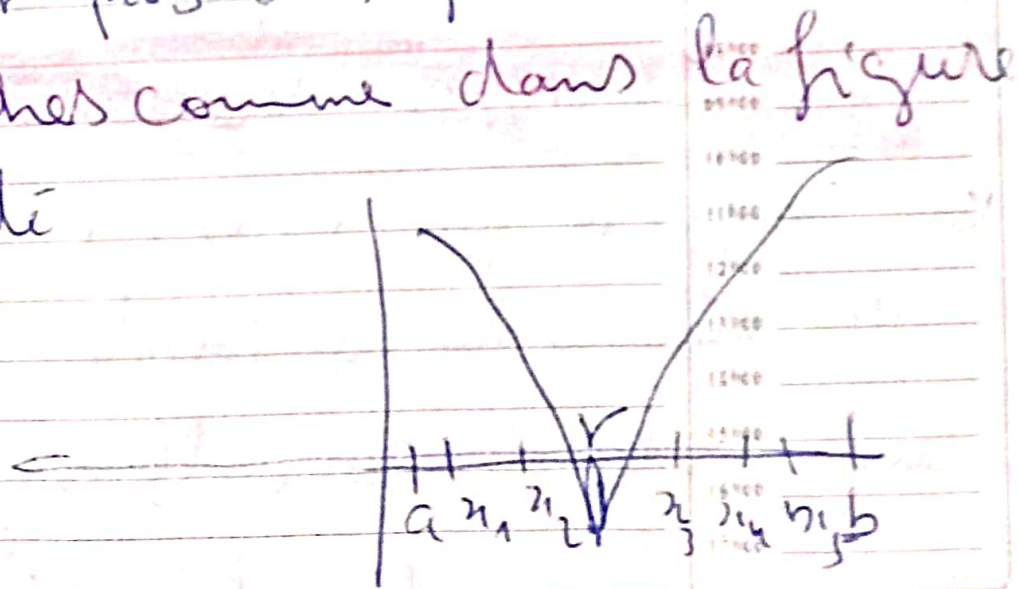
	Ottobre				
1	6	13	20	27	
2	7	14	21	28	
3	8	15	22	29	
4	9	16	23	30	
5	10	17	24	31	
6	11	18	25		
7	12	19	26		

3	10	17	24
4	11	18	25
5	12	19	26
6	13	20	27
7	14	21	28
1	8	15	22
2	9	16	23
			30

Reference				
1	8	15	72	25
2	5	14	23	30
3	10	17	74	31
4	11	18	25	
5	12	19	26	
6	13	20	27	
7	14	21	28	

arrête le processus, sinon on ne commente l'opération en partant de l'intervalle  $[n_{i0}, n_{i0+1}]$ , on continue l'opération jusqu'à obtenir un intervalle de longueur  $\varepsilon$  qui contient une racine.

Remarque: la méthode de balayage ne permet pas de séparer deux racines très proches comme dans la figure suivante



Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Di 6 13 20 27 Lu 7 14 21 28 Ma 1 8 15 22 29 Je 2 9 16 23 30 Sa 3 10 17 24 31 So 4 11 18 25 Mo 5 12 19 26	Di 3 10 17 24 Lu 4 11 18 25 Ma 5 12 19 26 Je 6 13 20 27 Sa 7 14 21 28 So 1 8 15 22 Mo 2 9 16 23	Di 3 10 17 24 31 Lu 4 11 18 25 Ma 5 12 19 26 Je 6 13 20 27 Sa 7 14 21 28 So 1 8 15 22 29 Mo 2 9 16 23 30	Di 7 14 21 28 Lu 1 8 15 22 29 Ma 2 9 16 23 30 Je 3 10 17 24 Sa 4 11 18 25 So 5 12 19 26 Mo 6 13 20 27	Di 5 12 19 26 Lu 6 13 20 27 Ma 7 14 21 28 Je 1 8 15 22 29 Sa 2 9 16 23 30 So 3 10 17 24 31 Mo 4 11 18 25	Di 2 9 16 23 30 Lu 3 10 17 24 Ma 4 11 18 25 Je 5 12 19 26 Sa 6 13 20 27 So 7 14 21 28 Mo 1 8 15 22 29







la longueur de  $I_n$  soit la moitié de

$I_{n-1}$

on pose:  $a_0 = a, b_0 = b$  et -

pour  $n \geq 0$ :  $c_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$   
si  $F(a_{n-1}) \cdot F(c_n) > 0$  on pose:

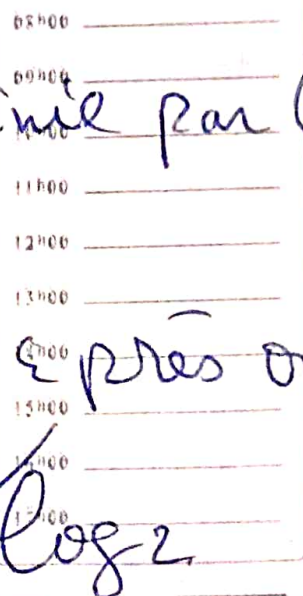
$$a_n = c_{n-1}, b_n = b_{n-1}$$

si  $F(a_{n-1}) \cdot F(c_n) < 0$  on pose:

$$a_n = a_{n-1}, b_n = c_n$$

**TH1** la suite  $(a_n)_{n=0,1,\dots}$  définie par (\*) converge vers  $r$ .

Pour que  $(a_n)$  approche  $r$  à  $\epsilon$  près on doit avoir  $n \geq \log_2 \left( \frac{b-a}{\epsilon} \right)$



Janvier							Février							Mars							Avril							Mai							Juin						
Di	6	13	20	27	Di	3	10	17	24	Di	3	10	17	24	31	Di	7	14	21	28	Di	5	12	19	26	Di	2	9	16	23	30										
Lu	7	14	21	28	Lu	4	11	18	25	Lu	4	11	18	25	Lu	1	8	15	22	29	Lu	6	13	20	27	Lu	3	10	17	24	Lu	3	10	17	24						
Me	1	8	15	22	29	Me	5	12	19	26	Me	5	12	19	26	Me	2	9	16	23	30	Me	7	14	21	28	Me	4	11	18	25	Me	4	11	18	25					
Je	2	9	16	23	30	Je	6	13	20	27	Je	6	13	20	27	Je	3	10	17	24	Je	3	10	17	24	Je	1	8	15	22	29	Je	5	12	19	26					
Ve	3	10	17	24	31	Ve	7	14	21	28	Ve	7	14	21	28	Ve	4	11	18	25	Ve	4	11	18	25	Ve	2	9	16	23	30	Ve	6	13	20	27					
Sa	4	11	18	25	4	11	18	25	4	11	18	25	4	11	18	25	Sa	5	12	19	26	Sa	2	9	16	23	Sa	3	10	17	24	31	Sa	7	14	21	28				
So	5	12	19	26	5	12	19	26	5	12	19	26	5	12	19	26	So	6	13	20	27	So	4	11	18	25	So	4	11	18	25	So	1	8	15	22	29				



Preuve

$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^n} (b-a)$$

Comme  $r \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ;

$$|r - a_n| \leq |b_n - a_n| \leq \frac{1}{2^n} (b-a)$$

Pour  $n \rightarrow +\infty \quad |r - a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$

Pour que  $|r - a_n| \leq \varepsilon$ , il suffit que

$$\frac{1}{2^n} (b-a) \leq \varepsilon \Rightarrow 2^n \geq \frac{(b-a)}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n \log_2 2 \geq \log \frac{(b-a)}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log \left( \frac{b-a}{\varepsilon} \right)}{\log 2}$$

Juillet	
1	7 14 21 28
2	8 15 22 29
3	9 16 23 30
4	10 17 24 31
5	11 18 25
6	12 19 26
7	13 20 27

Août	
1	4 11 18 25
2	5 12 19 26
3	6 13 20 27
4	7 14 21 28
5	8 15 22 29
6	9 16 23 30
7	10 17 24 31

Septembre	
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28

Octobre	
1	6 13 20 27
2	7 14 21 28
3	8 15 22 29
4	9 16 23 30
5	10 17 24 31
6	11 18 25
7	12 19 26

Novembre	
1	3 10 17 24
2	4 11 18 25
3	5 12 19 26
4	6 13 20 27
5	7 14 21 28
6	8 15 22 29
7	9 16 23 30

Décembre	
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24 31
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28

## 2) Méthode Itératives

Def: On appelle méthode itérative un procédé de calcul de la forme.

$$n_{k+1} = g(n_k), \quad k=0,1, \dots$$

dans lequel on part d'une valeur  $n_0$  calculer  $n_1$  puis  $n_2$ , ... est.

la formule (a) est dite formule de récurrence, la méthode est dite convergente si la suite  $n_k$  converge.

## 2.2) Méthode du point fixe

Def: Soit  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, on dit que  $\alpha$  est un point

Janvier						
	6	13	20	27		
1	7	14	21	28		
2	8	15	22	29		
3	9	16	23	30		
4	10	17	24	31		
5	11	18	25			
	12	19	26			

Février						
	3	10	17	24		
1	4	11	18	25		
2	5	12	19	26		
3	6	13	20	27		
4	7	14	21	28		
5	8	15	22			
6	9	16	23			

Mars						
	3	10	17	24	31	
1	4	11	18	25		
2	5	12	19	26		
3	6	13	20	27		
4	7	14	21	28		
5	8	15	22	29		
6	9	16	23	30		

Avril						
	7	14	21	28		
1	8	15	22	29		
2	9	16	23	30		
3	10	17	24			
4	11	18	25			
5	12	19	26			
6	13	20	27			

Mai						
	5	12	19	26		
1	6	13	20	27		
2	7	14	21	28		
3	8	15	22	29		
4	9	16	23	30		
5	10	17	24	31		
6	11	18	25			

Juin						
	2	9	16	23	30	
1	3	10	17	24		
2	4	11	18	25		
3	5	12	19	26		
4	6	13	20	27		
5	7	14	21	28		
6	8	15	22	29		



## 2) Méthode Itératives

Def: On appelle méthode itérative un procédé de calcul de la forme

$$n_{k+1} = g(n_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

dans lequel on part d'une valeur  $n_0$  calculer  $n_1$  puis  $n_2$  etc. - - -

la formule (a) est dite formule de récurrence, la méthode est dite convergente si la suite  $n_k$  converge.

### 2.2) Méthode du point fixe

Def: Soit  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, on dit que  $\alpha$  est un point

fixe de  $g$  si  $g(n^*) = n^*$ .

la résolution d'un problème à l'aide  
d'une formule de récurrence  $\left( n_{k+1} = g(n_k) \right)$   
peut être considérée comme une  
détermination d'un point fixe de  $g$ .

En effet:  $n_{k+1} = g(n_k) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k = n^* = \text{fixe de } g$

TH du point fixe

soit  $g$  définie sur  $[a, b]$  et:

①  $g([a, b]) \subset [a, b]$

②  $g$  est contractant:  $\exists L \in [0, 1[$  ( $L < 1$ )

$\forall x, y \in [a, b]: |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$

alors  $g$  admet un point fixe  $n^*$  de

plus,  $\forall n_0 \in [a, b]$ , la suite  $n_{k+1} = g(n_k)$

juillet	août	septembre	octobre	novembre	décembre
1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27	4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28	6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26	3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28



Converge vers  $x^*$

Remarque :

②  $\Leftrightarrow g$  continue et  $|g'(x)| < 1$  en supposant que  $g$  est dérivable en  $x$ .

Démonstration

1) existence du point fixe

soit  $x_0 \in [a, b]$  et  $(x_k)$  définie par

$x_{k+1} = g(x_k)$ , on a contractant

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq L |x_k - x_{k-1}|$$

$$|x_{k+1} - x_0| \leq \dots \leq L^k |x_1 - x_0|$$

et pour  $n > k$  on a

$$x_n - x_k = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_{n-2} - x_{n-3}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)$$

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
1 4 11 18 25 2 5 12 19 26 3 6 13 20 27 4 7 14 21 28 5 8 15 22 29 6 9 16 23 30 7 10 17 24 31	1 10 17 24 2 11 18 25 3 12 19 26 4 13 20 27 5 14 21 28 6 15 22 29 7 16 23 30	1 10 17 24 31 2 11 18 25 3 12 19 26 4 13 20 27 5 14 21 28 6 15 22 29 7 16 23 30	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28	1 9 16 23 30 2 10 17 24 3 11 18 25 4 12 19 26 5 13 20 27 6 14 21 28 7 15 22 29

$$\Rightarrow |n_n - n_k| \leq |n_n - n_{n-1}| + |n_{n-1} - n_{n-2}| + \dots + |n_{k+1} - n_k|$$

$$\leq (L^{n-1} + L^{n-2} + \dots + L^k) |n_n - n_0|$$

$$\leq L^k \frac{1 - L^{n-k}}{1 - L} |n_n - n_0|$$

(Somme des suite  
geometrique dont le terme  $L^k$  et raison  $L$ )

$$\leq \frac{L^k}{1-L} |n_n - n_0| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$0 < L < 1$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} |n_n - n_k| = 0 \Rightarrow (n_k)$  est une  
suite de Cauchy, donc elle converge.  
posons  $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k = n^*$

$n^* = g(n^*)$  par continuité de  $g$ .

2) unicité  $0 < |y^* - n_0| = |g(y^*) - g(n^*)|$

$$\leq L |y^* - n^*| \leq |y^* - n^*|$$

$L < 1$

juillet	août	septembre	octobre	novembre	décembre
7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27	4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28	5 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26	3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30	6 13 20 27 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27



Contradiction donc  $x^* = y^*$

exple:  $g(x) = x^2 - 100x + 1 = 0$

$$x_1^* \in [10^{-2}, 1], \quad x_2^* \in [10, 10^2]$$

Remarque:

on reprend la condition (2) dans le TH du point fixe.

$\exists L \in [0, 1[, \forall x, y \in [a, b]:$

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

si  $x \neq y$  alors:  $\left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right| \leq L < 1$

si  $g$  est dérivable sur  $[a, b]$ , alors en passant à la limite quand

$y \rightarrow x$  on obtient  $|g'(x)| < 1$

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
6 13 20 27 7 14 21 28 8 15 22 29 9 16 23 30 10 17 24 31 11 18 25 12 19 26	3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 8 15 22 29 9 16 23 30	2 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 8 15 22 29 9 16 23 30	7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27	5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 8 15 22 29 9 16 23 30 10 17 24 31 11 18 25	2 9 16 23 30 3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 8 15 22 29

Corollaire: une condition suffisante  
pour la convergence de la méthode  
du point fixe est que:

$$|g'(n)| < 1, \quad \forall n \in [a, b]$$

Exple: résoudre:  $\cos n - n = 0$  dans  $[0, 1]$ .

$$\cos n - n = g(n) \Rightarrow |g'(n)| = \sin n < 1$$

positif sur  $[0, 1]$

de plus  $g[0, 1] = [g(1), g(0)] = [\cos 1, 1]$   
(pas décroissant)  
sur  $[0, 1]$ .

donc  $\forall n_0 \in [0, 1]$ , la suite définie  
par:

$$\{n_0 \in [0, 1]\}$$

$$\{n_{n+1} = \cos n_n\}$$

converge vers la  
solution de  $\cos n - n = 0$ .

Juillet	
7	14 21 28
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24 31
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27

Août	
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24 31

Septembre	
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28

Octobre	
6	13 20 27
7	14 21 28
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24 31
4	11 18 25
5	12 19 26

Novembre	
3	10 17 24
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30

Décembre	
1	8 15 22 29
2	9 16 23 30
3	10 17 24 31
4	11 18 25
5	12 19 26
6	13 20 27
7	14 21 28



## critère d'arrêt des itérations

soit  $(n_k)$  la suite des itérations

definie par:  $n_{k+1} = g(n_k)$

Pour  $k, n \in \mathbb{N}$  tq  $n > k$ .

$$|n_k - n_n| = |f(n_{k+1}) - f(n_{n-1})| \leq L |n_{k+1} - n_{n-1}|$$

suite itérative  
du pte fixe
condition @

et par récurrence: (comme on a fait dans la démonstration existence du pt fixe)

$$|n_k - n_n| \leq L |n_{k-1} - n_{n-1}| \leq L^2 |n_{k-2} - n_{n-2}| \dots$$

$$\leq L^k |n_0 - n_{n-k}|$$

$$\leq L^k |b - a|$$

$[n_{k+1}, n_k] \subset [a, b]$   
longueur  $\uparrow$ 
longueur  $\downarrow$

6	13	20	27
7	14	21	28
8	15	22	29
9	16	23	30
10	17	24	31
11	18	25	
12	19	26	

3	10	17	24
4	11	18	25
5	12	19	26
6	13	20	27
7	14	21	28
8	15	22	
9	16	23	

3	10	17	24	31
4	11	18	25	
5	12	19	26	
6	13	20	27	
7	14	21	28	
8	15	22	29	
9	16	23	30	

7	14	21	28
8	15	22	29
9	16	23	30
10	17	24	
11	18	25	
12	19	26	
13	20	27	

5	12	19	26
6	13	20	27
7	14	21	28
8	15	22	29
9	16	23	30
10	17	24	31
11	18	25	

2	9	16	23	30
3	10	17	24	
4	11	18	25	
5	12	19	26	
6	13	20	27	
7	14	21	28	
8	15	22	29	

en passant à la limite quand

$n \rightarrow +\infty$  on a:

$$|n_k - n^*| \leq L^k (b-a)$$

(pq la suite converge vers la solution  $n^*$ )

donc si on veut calculer une approximation  $n_k^*$  de  $n^*$  à  $\epsilon$  près il suffit d'arrêter les itérations à  $k$  vérifiant:

$$k \geq \log \left( \frac{\epsilon}{b-a} \right) / \log L$$

juillet	août	septembre	octobre	novembre	décembre
1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27	4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28	6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26	3 10 17 24 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28 1 8 15 22 29 2 9 16 23 30	1 8 15 22 29 2 9 16 23 30 3 10 17 24 31 4 11 18 25 5 12 19 26 6 13 20 27 7 14 21 28



### 3) La méthode de Newton: → ID

Notons par  $\alpha$  une racine exacte recherchée et par  $n_0$  une valeur approchée de  $\alpha$ .

On suppose que  $f$  est de classe  $C^2$ , au voisinage de  $\alpha$ . Le développement de Taylor d'ordre 2 de  $f$  nous donne:

$$0 = f(\alpha) = f(n_0) + f'(n_0)(\alpha - n_0) + \frac{f''(\alpha)}{2}(\alpha - n_0)^2$$

racine.

$$\alpha \in [n_0, \alpha]$$

On suppose que  $f'(n_0) \neq 0$ .

$$\alpha = n_0 - \frac{f(n_0)}{f'(n_0)} - \frac{f''(\alpha)}{2f'(n_0)}(\alpha - n_0)^2$$

En négligeant le reste  $R = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(n_0)}(\alpha - n_0)^2$ , la quantité  $n_1 = n_0 - \frac{f(n_0)}{f'(n_0)}$  est une autre valeur approchée de  $\alpha$ .

TABLE 1	TABLE 2	TABLE 3	TABLE 4	TABLE 5	TABLE 6	TABLE 7
6 13 20 27	3 10 17 24	3 10 17 24 31	7 14 21 28	5 12 19 26	2 9 16 23 30	2 9 16 23 30
7 14 21 28	4 11 18 25	4 11 18 25	1 8 15 22 29	6 13 20 27	3 10 17 24 31	3 10 17 24
1 8 15 22 29	5 12 19 26	5 12 19 26	2 9 16 23 30	7 14 21 28	4 11 18 25	4 11 18 25
2 9 16 23 30	6 13 20 27	6 13 20 27	3 10 17 24	1 8 15 22 29	5 12 19 26	5 12 19 26
3 10 17 24 31	7 14 21 28	7 14 21 28	4 11 18 25	6 13 20 27	1 8 15 22 29	6 13 20 27
4 11 18 25	1 8 15 22	1 8 15 22 29	5 12 19 26	2 9 16 23	7 14 21 28	7 14 21 28
5 12 19 26	2 9 16 23	2 9 16 23 30	6 13 20 27	3 10 17 24	1 8 15 22 29	1 8 15 22 29

$$n_{k+1} = n_k - \frac{f(n_k)}{f'(n_k)}, \quad k=0, 1, \dots$$

application: déterminer  $\frac{1}{a}$  pour  $a > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - a$$

$$f'(n) = -\frac{1}{n^2}$$

$$n_{k+1} = n_k - \frac{\frac{\Delta}{n_k} - a}{-\frac{\Delta}{n_k}}$$

$$= n_k + n_k(1 - a m_k)$$

1	8	15	22	29
2	9	16	23	30
3	10	17	24	31
4	11	18	25	
5	12	19	26	
6	13	20	27	
7	14	21	28	